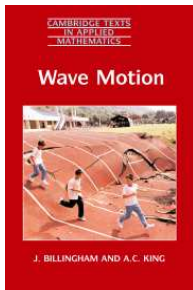


⑤ ONDES DANS LES SOLIDES ÉLASTIQUES

Waves in Elastic Solids

HYC31 : Dynamique des ondes

Olivier THUAL, 8 septembre 2019



Plan du livre “Wave Motion”
de J. BILLINGHAM et A. C. KING :

- ① Dérivation des équations du modèle
- ② Ondes dans un solide élastique infini
- ③ Ondes bi-dimensionnelles dans des solides élastiques semi-infinis
- ④ (Ondes dans des solides élastiques finis)
- ⑤ (Excitation et propagation des fronts d'ondes élastiques*)

Cours oral :

- 5.1 Derivation of the Governing Equation
- 5.2 Waves in an Infinite Elastic Body
- 5.3 Two-Dimensional Waves in Semi-infinite Elastic Bodies
 - 5.3.2 Stress-Free Surface

Pourront aussi être utilisés pour l'examen :

Les paragraphes 5.3.1 et 5.4.1

Ne sont pas au programme :

Les autres paragraphes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Se remémorer les équations de Navier (ou de Lamé)
- Décomposer en ondes longitudinales et transversales unidimensionnelles les ondes planes en milieu élastique infini.
- Présenter les ondes de Rayleigh dans le cas d'un milieu élastique semi-infini à surface libre.
- Établir la loi de réflexion d'une onde plane, oblique et longitudinale sur une surface libre.

⑤ - 1 : Dérivation des équations du modèle



Fig. 5.1. The deformation of the earth's surface after an earthquake.

Équations de Navier (ou de Lamé)

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div} \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u} .$$

- 1 Champ de déplacement : $\underline{u}(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1, u_2, u_3)$
- 2 Tenseur des petites déformations (strain tensor) $\underline{\underline{e}}$ de composantes :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

- 3 Loi de Hooke $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{e}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{e}}$ sous forme indicée :
 $\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$ avec la convention d'Einstein.

- 4 Équations de Navier sous forme indicée :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial e_{kk}}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

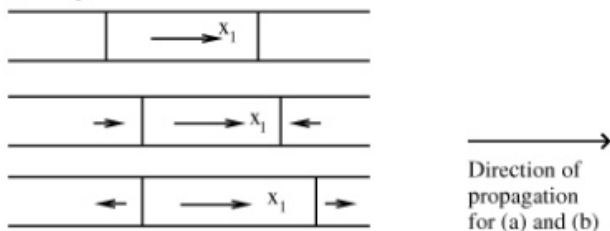
⑤ - 2 : Ondes dans un solide élastique infini

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div} \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u} .$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \underline{d} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \underline{d}}{\partial t^2} & \text{avec } \underline{d} = \text{div} \underline{u} \text{ et } c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ \Delta \underline{r} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} & \text{avec } \underline{r} = \text{rot} \underline{u} \text{ et } c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{cases}$$

- ① Il suffit de prendre la divergence et le rotationnel de ces équations.
- ② Pour $\lambda = 8.6 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-1}$, $\mu = 7.9 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-1}$ et $\rho = 7\,800 \text{ kg m}^{-3}$:
- ③ Ondes de dilatation (primaires) $c_1 \approx 5600 \text{ m s}^{-1}$
- ④ Ondes de rotation (secondaires) $c_2 \approx 3180 \text{ m s}^{-1}$

(a) Longitudinal waves



(b) Transverse waves

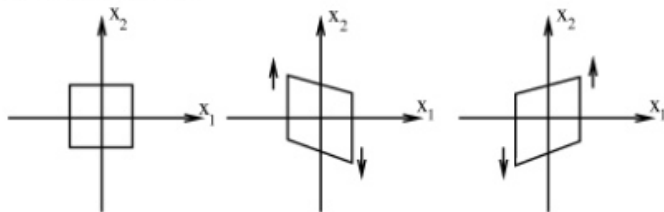


Fig. 5.2. The effect of the propagation of (a) longitudinal and (b) transverse waves on an element of elastic material.

Ondes unidimensionnelles

$$\Delta d = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \Delta \underline{r} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2}$$

Onde longitudinale : $u_1 = u_1(x_1, t)$, $u_2 = u_3 = 0$

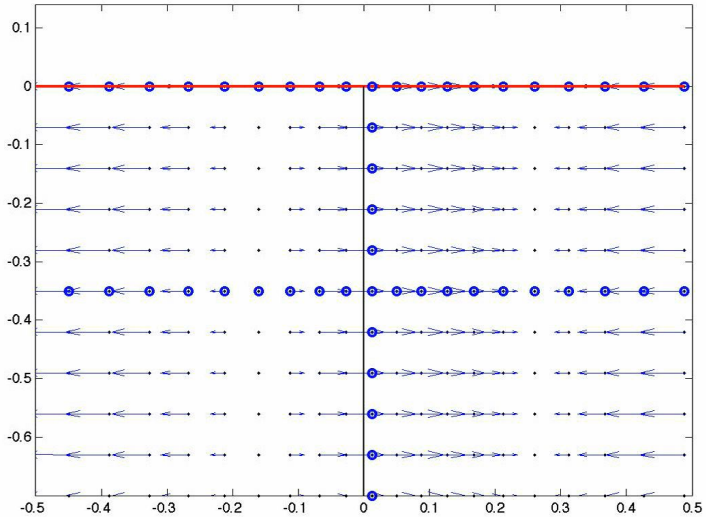
Comme $\underline{r} = \underline{0}$ et $\frac{\partial^2 d}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 d}{\partial t^2}$ avec $d = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$: vitesse c_1 .

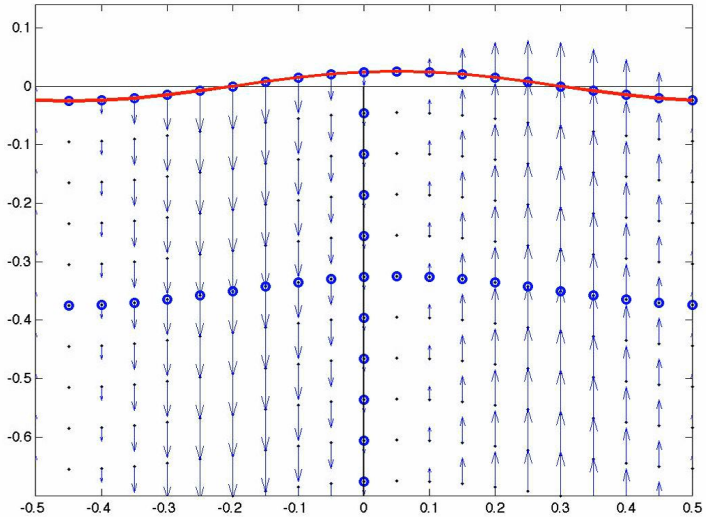
On a $\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$.

Onde transverse : $u_2 = u_2(x_1, t)$, $u_1 = u_3 = 0$

Comme $d = 0$ et $\frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2}$ avec $\underline{r} = (0, 0, \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1})$: vitesse c_2 .

On a $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$.





Décomposition d'une onde plane

Onde $\underline{u} = \underline{A} e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t)}$ avec $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$ et $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$

solution de $\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div} \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u}$.

- 1 On a $\rho \omega^2 \underline{A} = (\lambda + \mu)(\underline{A} \cdot \underline{k})\underline{k} + \mu k^2 \underline{A}$ avec $k = \|\underline{k}\|$.
- 2 En utilisant la décomposition $\underline{A} = A_n \underline{k}/\|\underline{k}\| + \underline{A}_{//}$ avec $\underline{A}_{//} \cdot \underline{k} = 0$:

$$\begin{cases} [\rho \omega^2 - (\lambda + 2\mu)k^2]A_n = 0 \\ (\rho \omega^2 - \mu k^2)\underline{A}_{//} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A_n \neq 0 & \underline{A}_{//} = \underline{0} & \omega = \pm c_1 k \\ A_n = 0 & \underline{A}_{//} \neq \underline{0} & \omega = \pm c_2 k \end{cases}$$

Il n'existe donc que des ondes longitudinales ou transverses planes 1D !

⑤ - 3 : Ondes bi-dimensionnelles dans des solides élastiques semi-infinis

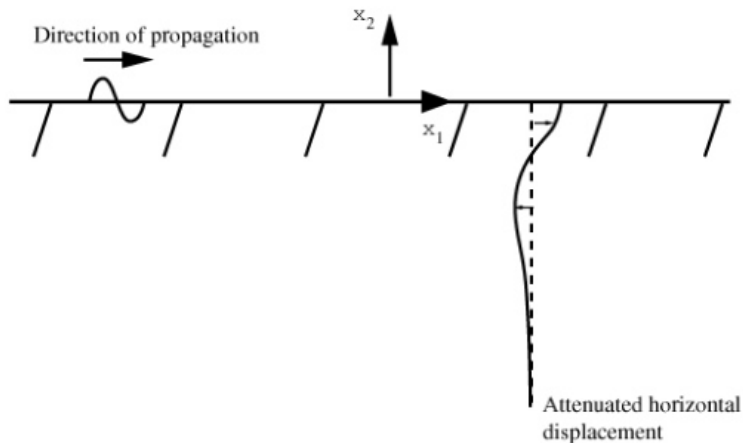
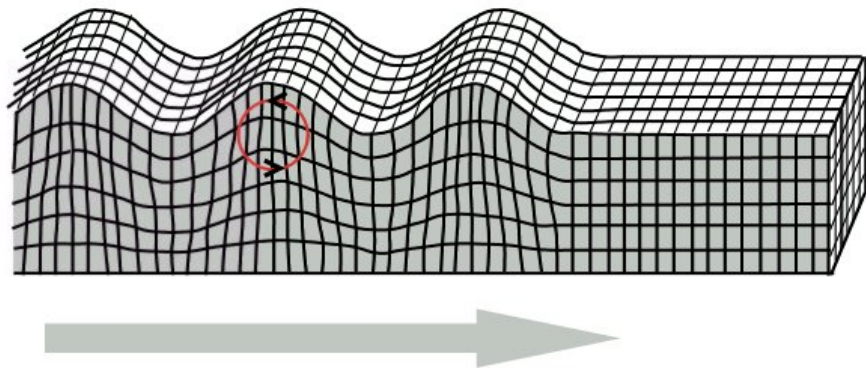


Fig. 5.4. Attenuated surface elastic waves.

Rayleigh Wave



Conditions aux limites $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}}$ à la surface libre

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}} \quad \text{en } x_2 = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}}) \underline{\underline{I}} + 2 \mu \underline{\underline{e}}$$

- 1 On suppose $\underline{\underline{u}} = [u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), 0]$
- 2 On a donc : $\sigma_{12} = \mu (u_{1,2} + u_{2,1})$ et $\sigma_{22} = \lambda (u_{1,1} + u_{2,2}) + \mu u_{2,2}$
- 3 On a donc $u_{1,2} + u_{2,1} = 0$ et $\lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu) u_{2,2} = 0$

- 4 Cas particulier $\underline{\underline{u}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx_1 - \omega t) + \alpha x_2}$,

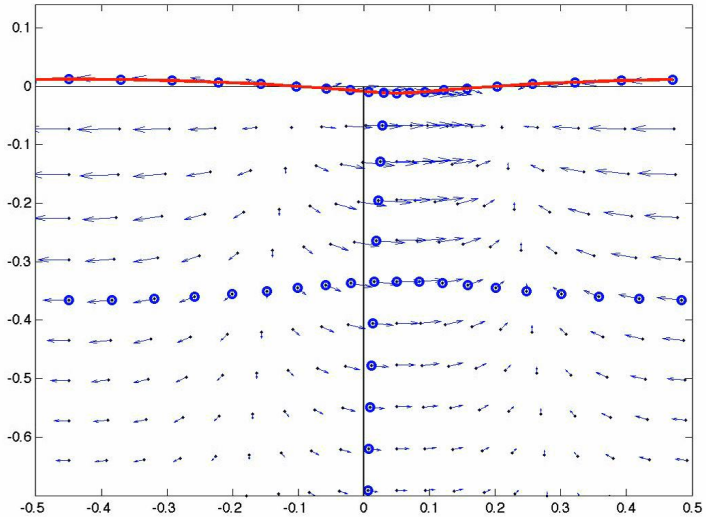
les conditions aux limites de surface libre en $x_2 = 0$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \alpha a_1 + ik a_2 = 0 \\ \lambda ik a_1 + (\lambda + 2\mu)\alpha a_2 = 0 \end{cases}$$

“Pseudo-ondes” transverse $\underline{A} \cdot \underline{k} = 0$ et longitudinale $\underline{B} = i B \underline{k}$

$$\underline{u} = A \begin{pmatrix} -\alpha \\ ik \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx_1 - \omega t) + \alpha x_2} + B \begin{pmatrix} ik \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx_1 - \omega t) + \beta x_2}$$

- 1 Les relations de dispersion $\omega^2 = c_1^2 \|\underline{k}\|^2$ et $\omega^2 = c_2^2 \|\underline{k}\|^2$ deviennent :
$$\omega^2 = c_1^2(k^2 - \beta^2) = c_2^2(k^2 - \alpha^2)$$
- 2 Conditions aux limites libres en $x_2 = 0$ conduisent à :
$$(\alpha^2 + k^2) [\beta^2(\lambda + 2\mu) - \lambda k^2] + 4k^2 \mu \alpha \beta = 0.$$
- 3 En notant $X = \omega^2 / (c_2^2 k^2)$ et $\xi = c_2 / c_1$, on montre que :
$$X^3 - 8X^2 + (24 + 16\xi^2)X = 16(1 - \xi^2).$$
- 4 La vitesse $c_R = \omega / k$ des ondes de Rayleigh vérifie
$$c_R^2 = X_1 c_2^2 \quad \text{où} \quad X_1 \in [0, 1]$$
- 5 On en déduit que la vitesse c_R est plus petite que $c_2 < c_1$.



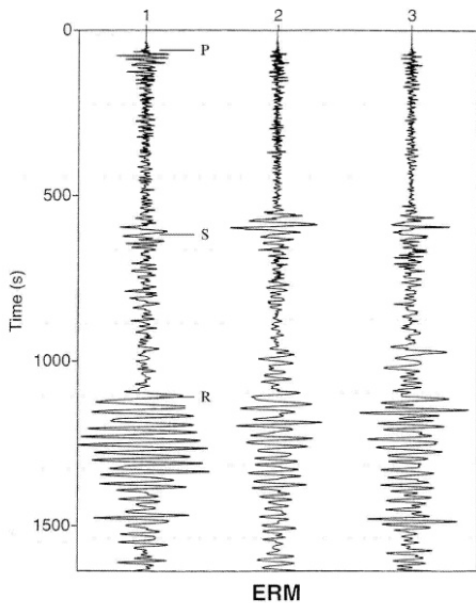


Fig. 5.5. A typical seismogram during an earthquake, showing the arrival of the P(rietary), S(econdary) and R(ayleigh) waves. Note that the Rayleigh waves have the largest amplitude.

Réflexion d'une onde plane longitudinale en une onde longitudinale (D comme divergence) et une onde transversale (R comme rotationnel) sur une surface libre

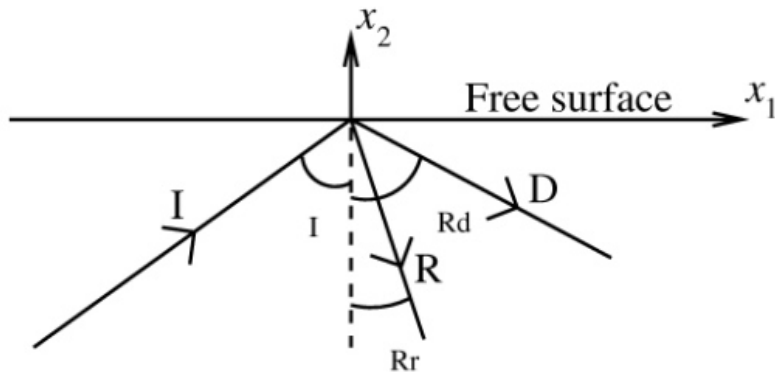


Fig. 5.6. The reflection of a dilatational plane wave at a free surface.

Coefficients de réflexions A_D/A_I et A_R/A_I

$$\underline{u} = \underline{u}^I + \underline{u}^D + \underline{u}^R \quad \text{avec}$$

$$\underline{u}^I = A_I \begin{pmatrix} \sin \theta_I \\ \cos \theta_I \end{pmatrix} \exp \left[ik_I \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta_I \\ \cos \theta_I \end{pmatrix} - i k_I c_1 t \right]$$

$$\underline{u}^D = A_D \begin{pmatrix} \sin \theta_{Rd} \\ -\cos \theta_{Rd} \end{pmatrix} \exp \left[ik_D \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta_{Rd} \\ -\cos \theta_{Rd} \end{pmatrix} - i k_D c_1 t \right]$$

$$\underline{u}^R = A_R \begin{pmatrix} \cos \theta_{Rr} \\ \sin \theta_{Rr} \end{pmatrix} \exp \left[ik_R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta_{Rr} \\ -\cos \theta_{Rr} \end{pmatrix} - i k_R c_2 t \right]$$

① La condition en $x_2 = 0$ entraîne : $\frac{\sin \theta_I}{c_1} = \frac{\sin \theta_{Rd}}{c_1} = \frac{\sin \theta_{Rr}}{c_2}$.

② et $\begin{cases} \left(\frac{A_D}{A_I} \right) \frac{\sin(2\theta_I)}{c_1} + \left(\frac{A_R}{A_I} \right) \frac{\cos(2\theta_{Rr})}{c_2} = \frac{\sin(2\theta_I)}{c_1} \\ \left(\frac{A_D}{A_I} \right) \frac{\lambda+2\mu \cos(2\theta_I)}{c_1} - \left(\frac{A_R}{A_I} \right) \frac{\mu \sin(2\theta_{Rr})}{c_2} = \frac{\lambda+2\mu \cos(2\theta_I)}{c_1} \end{cases}$