

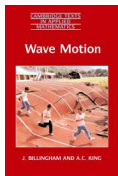
④ ONDES DE SURFACE

Water Waves

HYC31 : Dynamique des ondes

Olivier THUAL, 8 septembre 2019

Chapitre 4 : Ondes de surface



Plan du livre “Wave Motion”
de J. BILLINGHAM et A. C. KING :

- 1 Dérivation des équations du modèle
- 2 Ondes de gravité linéaires
- 3 (L'effet de la tension superficielle : ondes de gravité-capillarité)
- 4 (Ondes de bord)
- 5 (Ondes de sillage)
- 6 (La solution des problèmes aux conditions initiales)
- 7 (Ondes de surface en eaux peu profondes)
- 8 (Réfraction des ondes)
- 9 (L'effet de la viscosité)

AU PROGRAMME DU COURS

Cours oral :

- 4.1 Derivation of the Governing Equations
- 4.2 Linear Gravity Waves
 - 4.2.1 Progressive Gravity Waves

Pourront aussi être utilisés pour l'examen :

Les paragraphes 4.2.2, 4.3, 4.6, 4.7.0 et 4.7.1

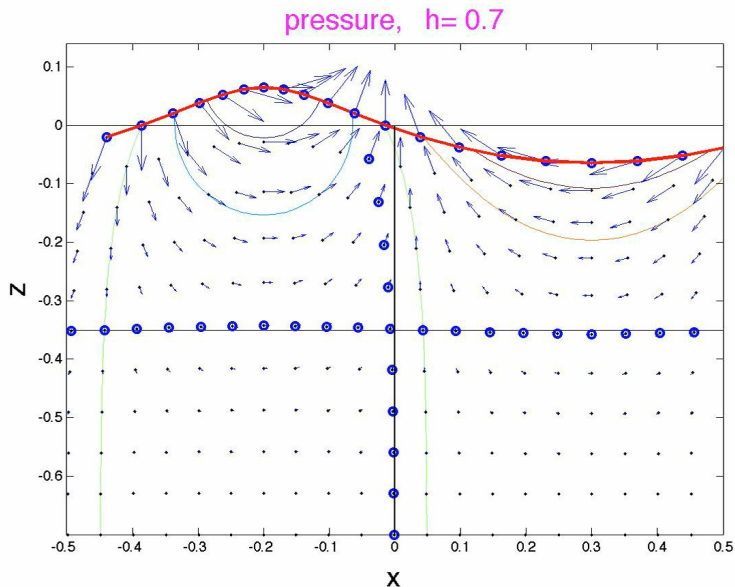
Ne sont pas au programme :

4.2.3, 4.2.4, 4.4, 4.5, 4.7.2, 4.8 et 4.9

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Comprendre le modèle d'écrivant les ondes de surface.
- Établir et interpréter la relation de dispersion des ondes de surface.
- Calculer la vitesse de groupe à laquelle se propagent les paquets d'ondes.
- Établir que les trajectoires des ondes planes sont des ellipses.
- Définir le flux d'énergie des ondes de surface.

Onde de surface



④ - 1 : Dérivation des équations du modèle

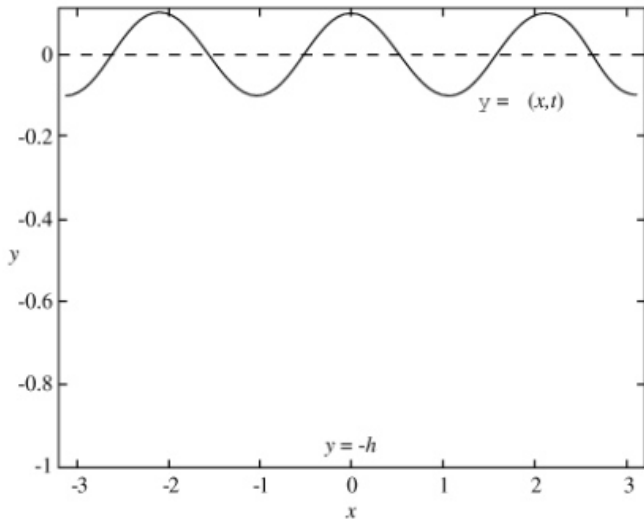


Fig. 4.1. The position of the free surface and rigid bed.

Équation de Bernoulli dans le cas potentiel

Dynamique d'un fluide incompressible

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \underline{g} \quad \text{avec} \quad \underline{g} = -\operatorname{grad} (gy).$$

- 1 On suppose $\underline{U} = \operatorname{grad} \phi$, i.e. l'écoulement est irrotationnel.
- 2 D'où : $\underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \underline{U}^2 + \underline{U} \wedge \operatorname{rot} \underline{U} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left[(\operatorname{grad} \phi)^2 \right]$.
- 3 On en déduit l'équation de Bernoulli

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gy = 0.$$

Démonstration.

Il suffit d'effectuer la transformation $\phi \rightarrow \phi + \int_0^t C(s) ds$ où $C(t)$ est la constante d'intégration de l'équation de Bernoulli. □

Conditions aux limites

Condition cinématique au fond : $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ en } y = -h(x)$$

Condition cinématique à la surface : $\frac{D}{Dt} \{y - \eta(x, t)\} = 0$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \text{ en } y = \eta(x, t)$$

Condition dynamique à la surface : $p = p_{atm}$

$$-\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi)^2 + g\eta = 0$$

en posant $p_{atm} = 0$ suite au changement de variable $p \rightarrow p - p_{atm}$

Conditions aux limites en surface

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{cases} \quad \text{en } y = 0$$

Équations dans la masse

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{pour } -\infty < x < \infty, -h \leq y \leq 0$$

Conditions aux limites au fond

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = -h$$

④ - 2 : Ondes de gravité linéaires

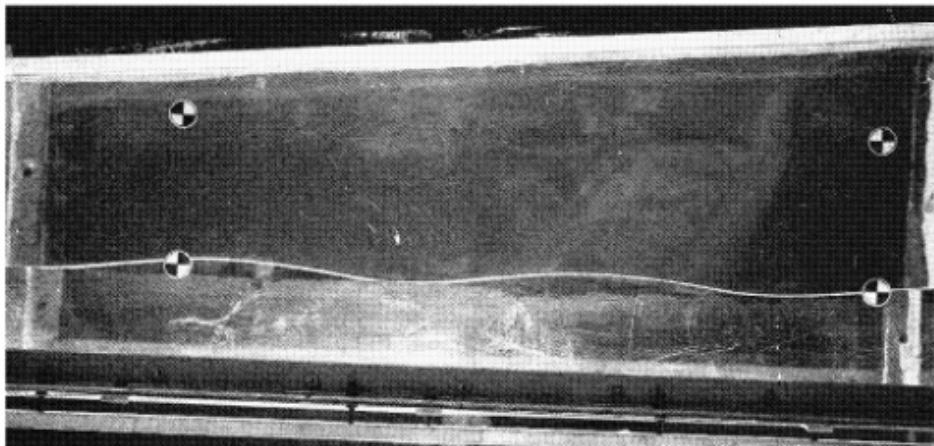


Fig. 4.2. A typical, linear, progressive gravity wave.

Modèle potentiel linéarisé après élimination de η

$$\Delta\phi = 0, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = -h$$

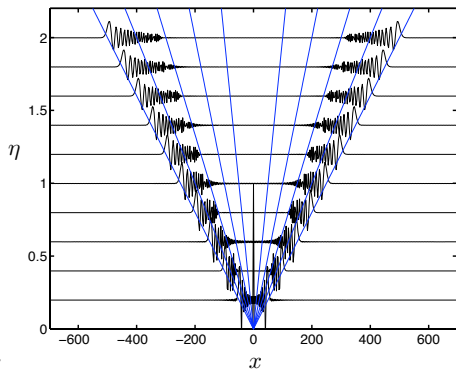
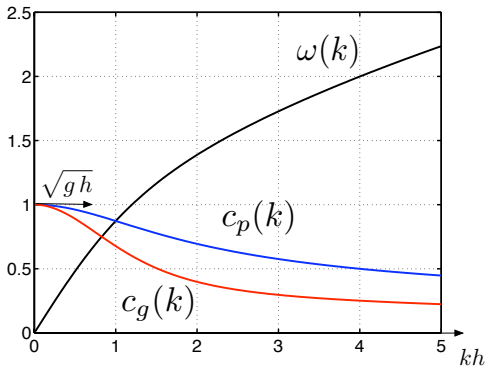
- 1 On cherche des solutions de la forme $\phi(x, y, t) = F(x - ct) Y(y)$
- 2 On a donc $F'' + k^2 F = 0$ et $Y'' - k^2 Y = 0$
- 3 D'où $F = A \cos[k(x - ct)] + B \sin[k(x - ct)]$ et $Y = Ce^{ky} + De^{-ky}$
- 4 La condition aux limites du fond est vérifiée pour
 $\phi(x, y, t) = \cosh[k(y + h)] \{ \bar{A} \cos[k(x - ct)] + \bar{B} \sin[k(x - ct)] \}$
- 5 Constantes \bar{A} et \bar{B} liées aux constantes A, B, C et D .

Relation de dispersion des ondes de surface.

- 1 On a $c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh)$ ou $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ en posant $\omega = c k$.

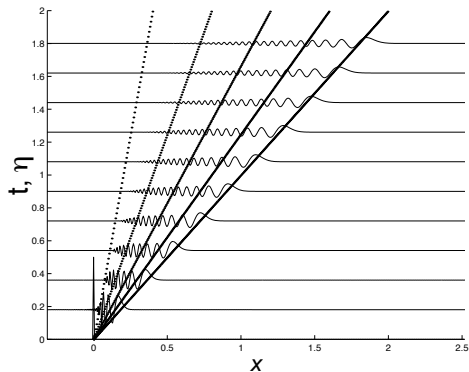
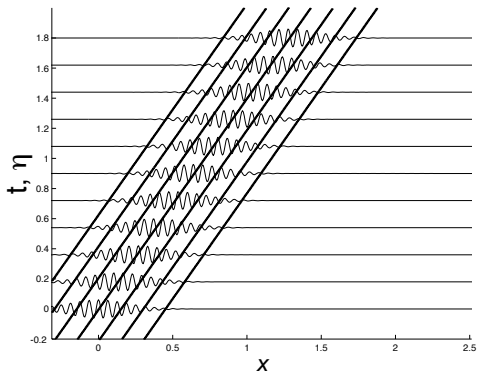
Relation de dispersion des ondes de surface

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

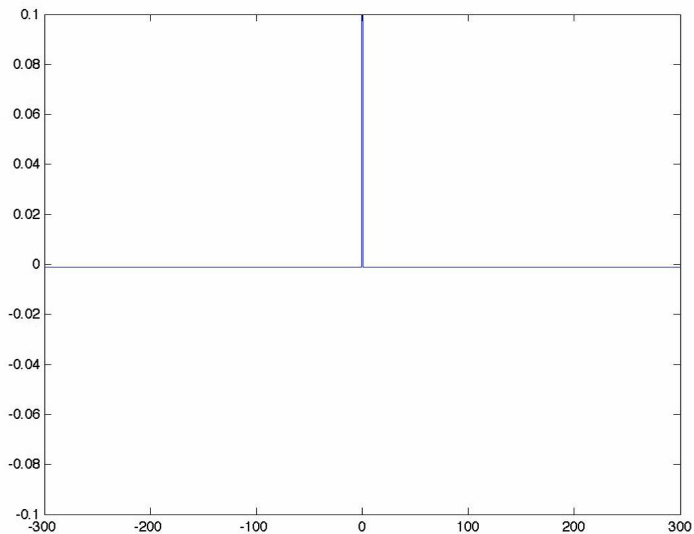


Vitesse de groupe $c_g(k)$

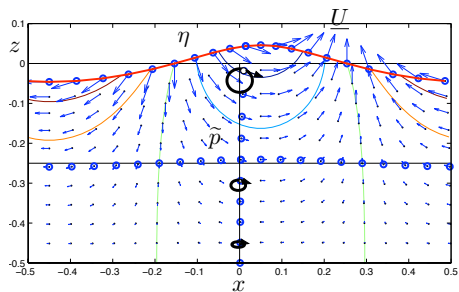
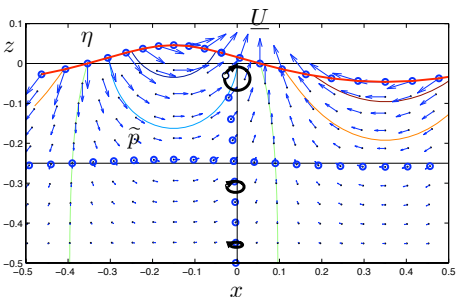
$$c_p = \frac{\omega(k)}{k} = \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(k h)}, \quad c_g = \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{1}{2} c_p \left[1 + \frac{2 k h}{\sinh(2 k h)} \right]$$



Réponse impulsionnelle des ondes de surface



Champs et trajectoires



Trajectoires des particules

$$\phi(x, y, t) = \frac{ag}{\omega \cosh(kh)} \cosh[k(y+h)] \sin[k(x-ct)] \quad \text{et} \quad \underline{U} = \underline{\text{grad}} \phi$$

① On cherche les trajectoires $(x, y) = [X_0 + X_1(t), Y_0 + Y_1(t)]$ avec $|X_1| \ll |X_0|$ et $|Y_1| \ll |Y_0|$ (amplitude des ondes petite).

② On a donc

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = \frac{ag}{k \cosh(kh)} \cosh[k(Y_0 + h)] \cos[k(X_0 - ct)] \\ \frac{dY_1}{dt} = \frac{ag}{k \cosh(kh)} \sinh[k(Y_0 + h)] \sin[k(X_0 - ct)] \end{cases}$$

③ En intégrant par rapport au temps, on obtient

$$\begin{cases} X_1(t) = -\frac{ag}{c k^2 \cosh(kh)} \cosh[k(Y_0 + h)] \sin[k(X_0 - ct)] \\ Y_1(t) = \frac{agc}{c k^2 \cosh(kh)} \sinh[k(Y_0 + h)] \cos[k(X_0 - ct)] \end{cases}$$

④ Les trajectoires sont des ellipses.

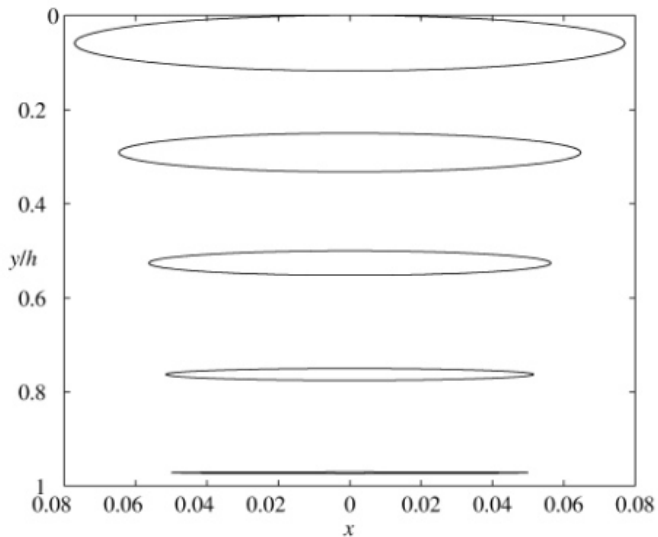
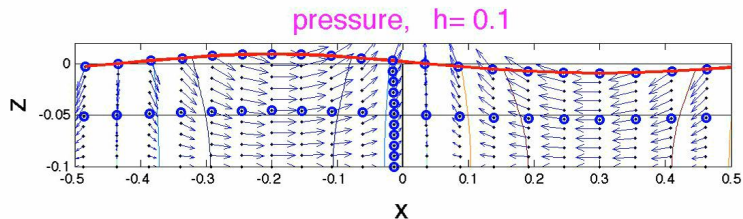
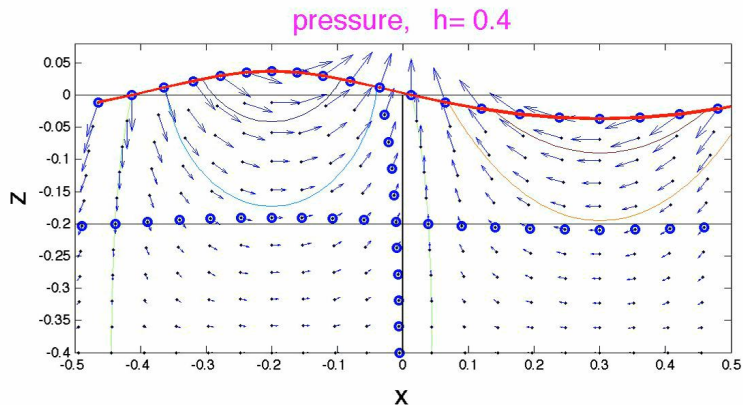


Fig. 4.3. Typical motions of fluid particles driven by a progressive gravity wave.

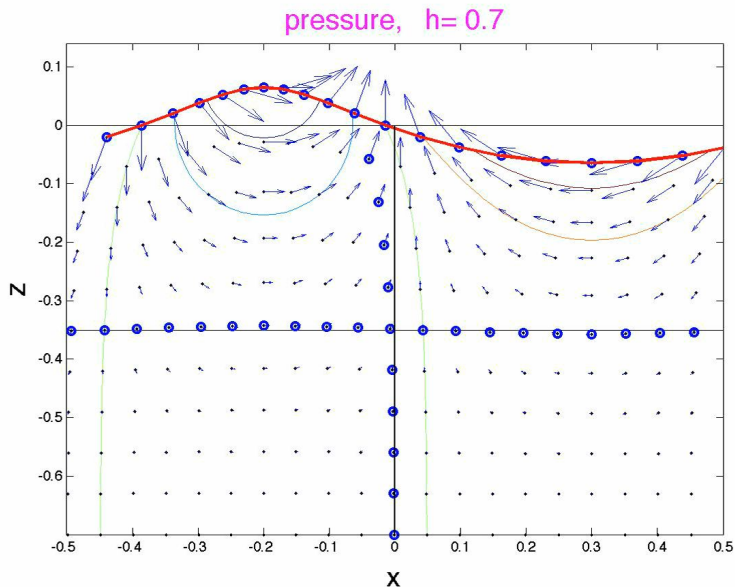
Onde de surface



Onde de surface



Onde de surface



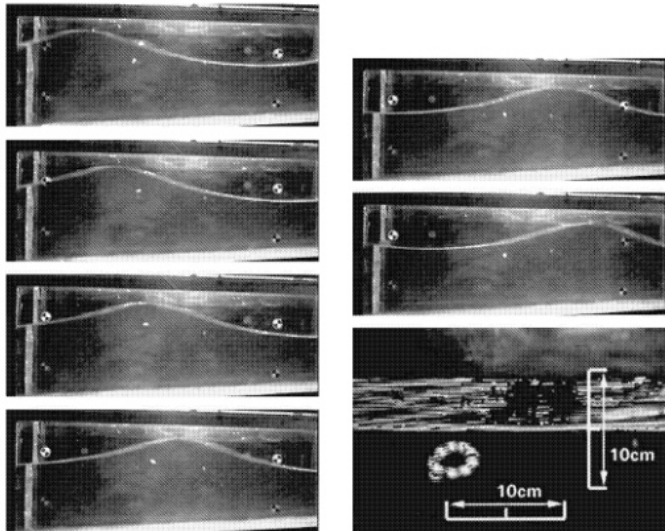


Fig. 4.4. The paths of neutrally buoyant particles under a progressive gravity wave.

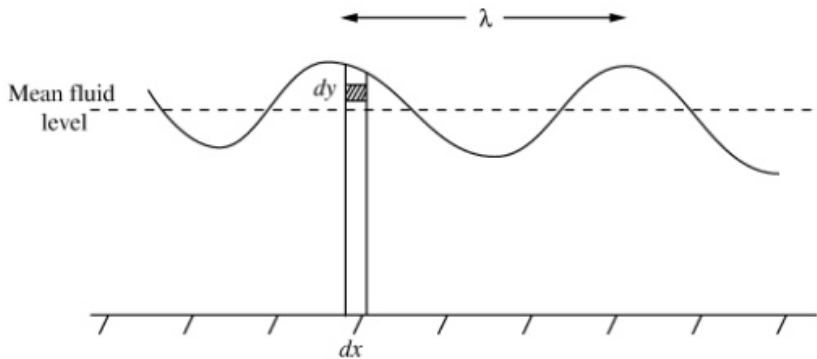


Fig. 4.5. The basic strip in the wave from which we calculate the kinetic and gravitational potential energy densities.

$$\text{Énergie cinétique } \bar{K} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_{-h}^0 \frac{1}{2} \rho \|\text{grad } \phi\|^2 dy dx \quad \text{avec } \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\text{Énergie potentielle } \bar{V} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_0^\eta \rho g y dy dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{1}{2} \rho g \eta^2 dx$$

$$\text{Flux d'énergie totale } E_F = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-h}^0 \rho \frac{\partial \phi}{\partial x} dy dt \quad \text{avec } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

① Énergie totale $H = \bar{K} + \bar{V} = \frac{1}{2} \rho g a^2$ pour une onde
 $\eta = a \cos[k(x - ct)]$ et $\phi = \frac{ag}{\omega \cosh(kh)} \cosh[k(y + h)] \sin[k(x - ct)]$.

② A partir de la relation $p = p_{atm} - \rho g y - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$, on déduit
$$E_F = -\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-h}^0 \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dy dt = c_g H$$

$$H = \frac{1}{2} \rho g a^2 \quad \text{et} \quad E_F = c_g H$$