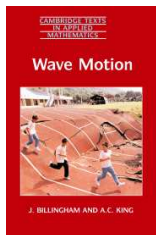


# ③ ONDES SONORES

## Sound Waves

NHC33 : Dynamique des ondes

Olivier THUAL, 8 septembre 2019



Plan du livre "Wave Motion"  
de J. BILLINGHAM et A. C. KING :

- 1 Dérivation des équations du modèle
- 2 Ondes planes
- 3 (Transmission de l'énergie acoustique)
- 4 Ondes planes dans des tubes
- 5 Guides d'ondes acoustiques
- 6 (Sources acoustiques)
- 7 (Radiation à partir de sources dans un mur plan)

# AU PROGRAMME DU COURS

## Cours oral :

- 3.1 Derivation of the Governing Equation
- 3.2 Plane Waves
- 3.4 Plane Waves In Tubes
- 3.5 Acoustic Waveguides
  - 3.5.1 Reflection of a Plane Acoustic Wave by a Rigid Wall
  - 3.5.2 A Planar Waveguide

## Pourront aussi être utilisés pour l'examen :

Les paragraphes 3.3 et 3.5.3

## Ne sont pas au programme :

Les paragraphes 3.6 et 3.7

# OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Comprendre le modèle décrivant les ondes sonores.
- Établir que les ondes planes sont des vibrations longitudinales.
- Définir les notions d'admittance, de réflexion et de transmission.
- Calculer la vitesse de phase et de groupe dans des guides d'ondes.

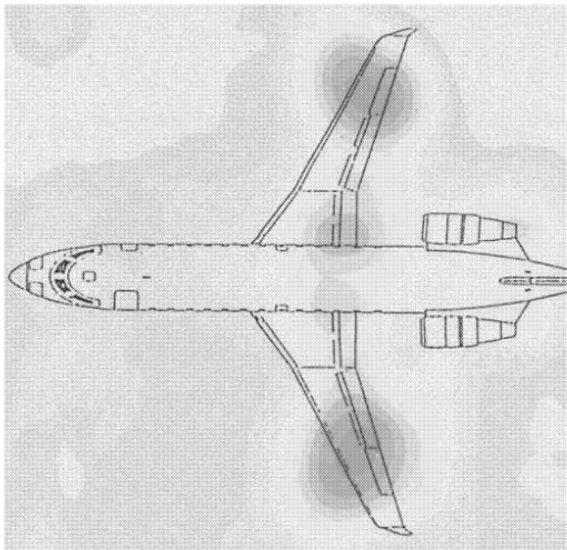


Fig. 3.1. A large aircraft and the sound field associated with it during landing.

### ③ - 1 : Dérivation des équations du modèle

Hypothèse des mouvements isentropiques :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{U}) = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad \frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

- ① État d'équilibre  $p = p_0$ ,  $\rho = \rho_0$  et  $\underline{U} = \underline{0}$ , petites perturbations  $p = p_0 + \tilde{p}$ ,  $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$  et  $\underline{U} = \tilde{\underline{U}}$  et équations linéarisées :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \tilde{\underline{U}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\underline{U}}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} \tilde{p}, \quad \tilde{\rho} = \frac{d\rho}{dp}(p_0) \tilde{p}$$

- ② En éliminant  $\tilde{\rho}$  et  $\tilde{\underline{U}}$ , on a :  $\Delta \tilde{p} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2}$  avec  $c^2 = \left\{ \frac{d\rho}{dp}(p_0) \right\}^{-1}$

- ③ Dans l'air avec  $p_0 = 10^5$  Pa,  $\rho_0 = 1.2$  kg/m<sup>3</sup> et  $\gamma = 1.4$  :

$$dp/d\rho = \gamma p_0/\rho_0 \quad \text{et donc} \quad c = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0} \sim 340 \text{ m s}^{-1}$$

## Modèle compressible, adiabatique et linéarisé :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \tilde{\underline{U}}, \quad \frac{\partial \tilde{\underline{U}}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \left( \frac{\tilde{p}}{\rho_0} \right), \quad \tilde{\rho} = \frac{1}{c^2} \tilde{p}.$$

On peut écrire  $\tilde{\underline{U}} = \operatorname{grad} \phi$  :

On pose tout d'abord  $-\frac{\tilde{p}}{\rho_0} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}$ . On en déduit  $\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\underline{U}} - \operatorname{grad} \tilde{\phi}) = 0$  et donc  $\tilde{\underline{U}} - \operatorname{grad} \tilde{\phi} = \underline{f}(\underline{x})$ . Si  $\tilde{\underline{U}} = \underline{0}$  pour  $t = t_0$ , on pose alors  $\phi = \tilde{\phi} - \tilde{\phi}(t_0)$  de sorte que, finalement,  $\tilde{\underline{U}} = \operatorname{grad} \phi$ .

On en déduit :

$$\Delta \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \tilde{\underline{U}} = \operatorname{grad} \phi, \quad \tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \text{et} \quad \tilde{\rho} = \frac{1}{c^2} \tilde{p}.$$

### ③ - 2 : Ondes planes

$$\Delta\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \underline{\tilde{U}} = \underline{\text{grad}} \phi, \quad \tilde{\rho} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \text{et} \quad \tilde{p} = \frac{1}{c^2} \tilde{\rho}.$$

① On suppose que  $\phi = f(x - ct)$ . On en déduit :

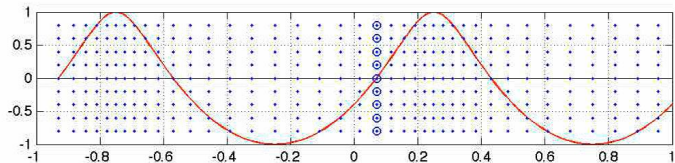
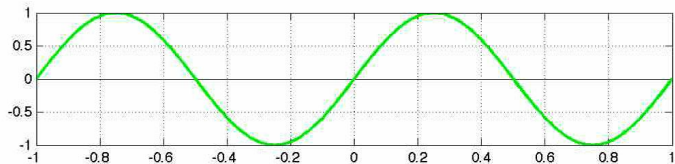
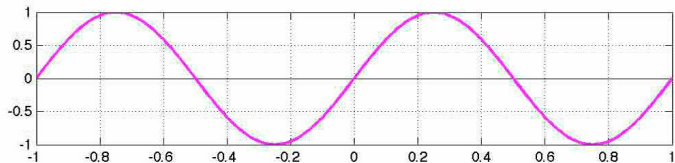
$$\tilde{u} = f'(x - ct), \quad \tilde{v} = \tilde{w} = 0, \quad \tilde{\rho} = \rho_0 c f'(x - ct), \quad \tilde{p} = \frac{\rho_0}{c} f'(x - ct)$$

② Une onde plane  $f(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)$  est toujours longitudinale :  
il suffit d'orienter l'axe  $Ox$  dans la direction du vecteur d'onde  $\underline{k}$ .

③ Ordres de grandeur des termes de l'équation

$$\rho \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \boxed{\rho \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \boxed{\mu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}} - \boxed{\rho g}.$$

négligeables pour  $M = \frac{u_0}{c} \ll 1$  et  $20\text{Hz} < f < 2 \times 10^4 \text{ Hz}$ .



### ③ - 4 : Ondes planes dans des tubes

#### Cas 1D

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \tilde{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \text{et} \quad \tilde{\rho} = \frac{1}{c^2} \tilde{p}.$$

- 1 La vitesse  $\frac{dx_0}{dt}(t)$  est celle du piston de position  $x = x_0(t) \sim 0$ .
- 2 On a donc la condition aux limites  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{dx_0}{dt}(t)$  en  $x = 0$ .
- 3 On en déduit  $\phi = -c x_0(t - x/c)$  à droite du piston
- 4 Le flux volumique du gaz est  $Q = A \tilde{u}$ .
- 5 L'admittance du tube est définie par  $Y = \frac{A}{\rho_0 c}$
- 6 Si  $\phi = f(x - c t)$  on a  $\tilde{p} = \rho_0 c \tilde{u}$  et donc  $Q = Y \tilde{p}$
- 7 Si  $\phi = g(x + c t)$  on a  $\tilde{p} = -\rho_0 c \tilde{u}$  et donc  $Q = -Y \tilde{p}$

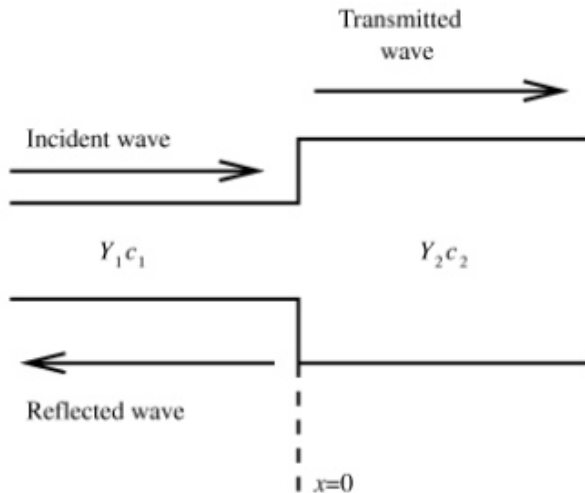


Fig. 3.2. Incident, reflected and transmitted plane waves at a junction between two tubes.

## Réflexion et transmission d'ondes par des discontinuités de section

Solution de la forme  $\tilde{p} = \begin{cases} f_I(x - c_1 t) + f_R(x + c_1 t) & \text{pour } x < 0 \\ f_T(x - c_2 t) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$

- 1 On a  $Y_1 = A_1/(\rho_0 c_1)$  et  $Y_2 = A_2/(\rho_0 c_2)$ .
- 2 Continuité de la pression :  $f_I(-c_1 t) + f_R(c_1 t) = f_T(-c_2 t)$ .
- 3 Continuité du débit :  $Y_1 f_I(-c_1 t) - Y_1 f_R(c_1 t) = Y_2 f_T(-c_2 t)$ .
- 4 On a donc

$$\begin{cases} f_T(x - c_2 t) = T f_I \left[ \frac{c_1}{c_2} (x - c_2 t) \right] & \text{avec } T = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2} \\ f_R(x + c_1 t) = -R f_I [-(x + c_1 t)] & \text{avec } R = \frac{Y_2 - Y_1}{Y_1 + Y_2} \end{cases}$$

- 5 Coefficients de transmission et de réflexion :  $T + R = 1$ .
- 6 Si  $Y_2 \gg Y_1$  :  $T = 0$  et  $R = 1$
- 7 Si  $Y_1 \gg Y_2$  :  $T = 2$  et  $R = -1$

### ③ - 5 : Guides d'ondes acoustiques

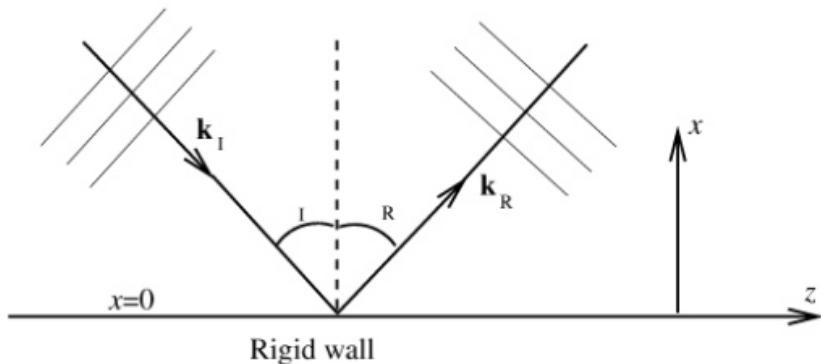


Fig. 3.3. Incident and reflected plane, acoustic waves at a rigid wall.

## Onde incidente sur un mur

$$\phi_I = A_I e^{i(\omega_I t - \underline{k}_I \cdot \underline{x})} \quad \text{avec} \quad \underline{k}_I = \frac{\omega_I}{c} \begin{pmatrix} -\cos \theta_I \\ 0 \\ \sin \theta_I \end{pmatrix}$$

- ① On cherche  $\phi = \phi_I + \phi_R$  où  $\phi_R$  est une onde plane :

$$\phi_R = A_R e^{i\omega_R \left( t - \sin \theta_R \frac{z}{c} - \cos \theta_R \frac{x}{c} \right)}$$

- ② Vitesse normale nulle sur le mur :  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$  pour  $x = 0$ .
- ③ On en déduit que pour tout  $z$  :

$$A_I e^{i\omega_I \left( t - \sin \theta_I \frac{z}{c} \right)} - A_R e^{i\omega_R \left( t - \sin \theta_R \frac{z}{c} \right)} = 0 .$$

ce qui entraîne  $\omega_I = \omega_R$ ,  $A_I = A_R$  et  $\theta_I = \theta_R$ .

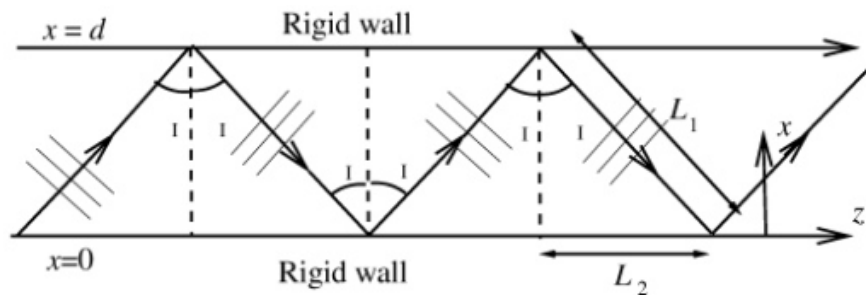


Fig. 3.4. Plane waves zig-zagging along a planar waveguide.

Somme de deux ondes planes vérifiant  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$  en  $x = 0$

$$\phi = A e^{i\omega \left( t - \sin \theta_l \frac{z}{c} + \cos \theta_l \frac{x}{c} \right)} + A e^{i\omega \left( t - \sin \theta_l \frac{z}{c} - \cos \theta_l \frac{x}{c} \right)}$$

①  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$  en  $x = d$  entraîne :  $\phi = e^{i\omega \cos \theta_l \frac{d}{c}} = e^{-i\omega \cos \theta_l \frac{d}{c}}$

② Donc  $\cos \theta_l = \frac{n\pi c}{\omega d}$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots, n_{\max}$  avec  $n_{\max} \leq \frac{\omega d}{\pi c}$

③ Si  $\omega$  est fixé, on a les modes  $\phi_n = 2A \cos \left( \frac{n\pi x}{d} \right) e^{i(\omega t - k_n z)}$  avec

$$k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} < \frac{\omega}{c}$$

④ Si  $k$  est fixé, on a les modes  $\phi_n = 2A \cos \left( \frac{n\pi x}{d} \right) e^{i(\omega_n t - kz)}$  avec

$$\omega_n = c \sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \geq \frac{\pi c}{d}$$

Vitesses de phase  $c_p = \frac{\omega_n}{k}$  et de groupe  $c_g = \frac{d\omega_n}{dk}$  vérifient

$$c_g < c < c_p \quad \text{et} \quad c_g c_p = c^2$$

