② VIBRATION D'UNE CORDE TENDUE

Waves on a Streched String

NHC33 : Dynamique des ondes

Olivier THUAL, 8 septembre 2019

Plan du livre "Wave Motion" de J. BILLINGHAM et A. C. KING :

1. Dérivation des équations du modèle
2. (Ondes stationnaires des cordes de longueur finie)
3. Solution de D'Alembert des cordes de longueur infinie
4. Réflexion et transmission d'ondes par des discontinuités en densité

AU PROGRAMME DU COURS

Cours oral :

- 2.1 Derivation of the Governing Equation
- 2.3 D'Alembert's Solution for Strings of Infinite Length
- 2.4 Reflection and Transmission of Waves by Discontinuities in Density
  - 2.4.1 A Single Discontinuity

Pourront aussi être utilisés pour l'examen :

- Les paragraphes 2.2 et 2.4.2

Ne sont pas au programme :

- Néant

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Introduire les idées et les techniques de base de la théorie des ondes linéaires et non dispersives.

- Résoudre les problèmes aux conditions initiales pour des cordes finies ou infinies.

- Aborder les notions de transmission et réflection des ondes en présence de discontinuités du milieu.

② - 1 : Dérivation des équations du modèle

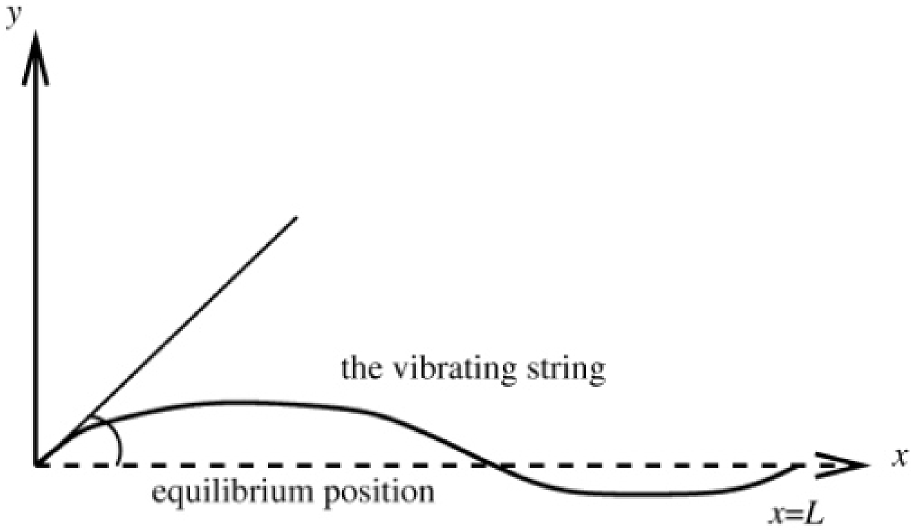


Fig. 2.1. A vibrating, stretched string.

Principe fondamental de la dynamique

$$T\ \sin(\psi + \delta\psi) - T\ \sin\psi = \rho\,\delta x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ .$$

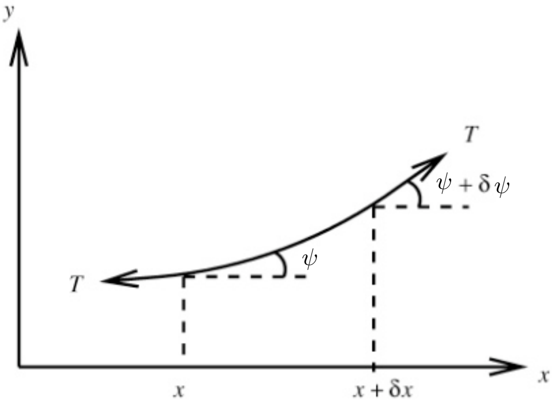


Fig. 2.2. The vertical force balance on a small element of a stretched string.

Petites oscillations de la corde vibrante

$$T\,\sin(\psi+\delta\psi) - T\,\sin\psi = \rho\,\delta x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,.$$

1. On suppose $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \mathrm{tg}\,\psi \sim \psi$ petit
2. On a donc : $\sin(\psi+\delta\psi) - \sin\psi \sim \delta\psi \sim \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\,\delta x \sim \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
3. Le modèle s'écrit alors $T\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$
4. On peut écrire

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \text{avec} \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

5. La célérité des ondes est égale à c

② - 3 : Solution de D'Alembert des cordes infinies

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{pour } -\infty < x < \infty \text{ et } t \geq 0 \,.$$

1. On effectue le changement de variable $\xi = x + ct$ et $\eta = x - ct$:
$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \end{pmatrix}$$
2. D'où : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 = 4\,\frac{\partial^2}{\partial \eta\,\partial \xi}$.
3. On en déduit : $y(x,t) = f(\eta) + g(\xi) = f(x - ct) + g(x + ct)$
4. Avec les conditions initiales $y(x,0) = y_0(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2}y_0(x) - \frac{1}{2c}\int_a^x v_0(s)ds \;, \quad g(x) = \frac{1}{2}y_0(x) + \frac{1}{2c}\int_a^x v_0(s)ds$$

Solution générale

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left[y_0(x-ct) + y_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds \; .$$

Condition initiale en chapeau de forme :

$$y_0(x) = H(x+a) - H(x-a), \quad v_0(x) = 0 \quad \text{avec} \quad H(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x > 0 \\ 0 & \text{pour} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. On a : $y(x,t) = \frac{1}{2}\left[H(x+ct+a) - H(x+ct-a)\right] + \frac{1}{2}\left[H(x-ct+a) - H(x-ct-a)\right]$

Condition initiale sinusoïdale :

$$y_0(x) = a \sin kx, \quad v_0(x) = 0 \; .$$

1. On a : $y(x,t) = \frac{1}{2} a \left[\sin(kx+ct) + \sin(kx-ct)\right]$

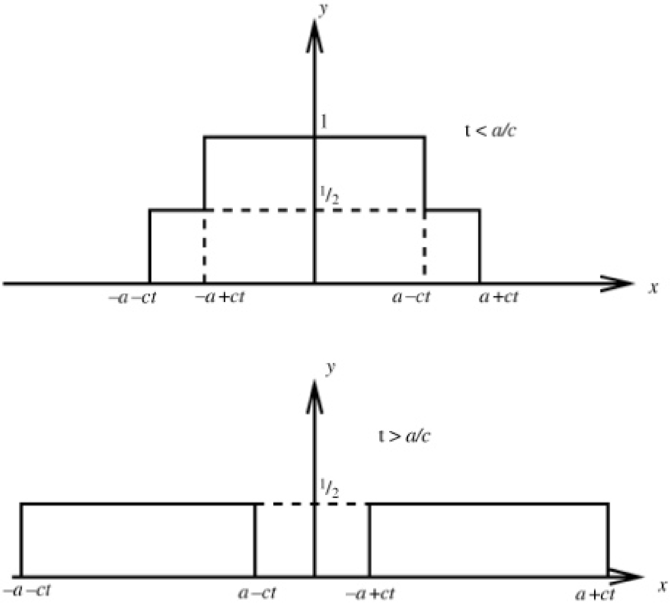
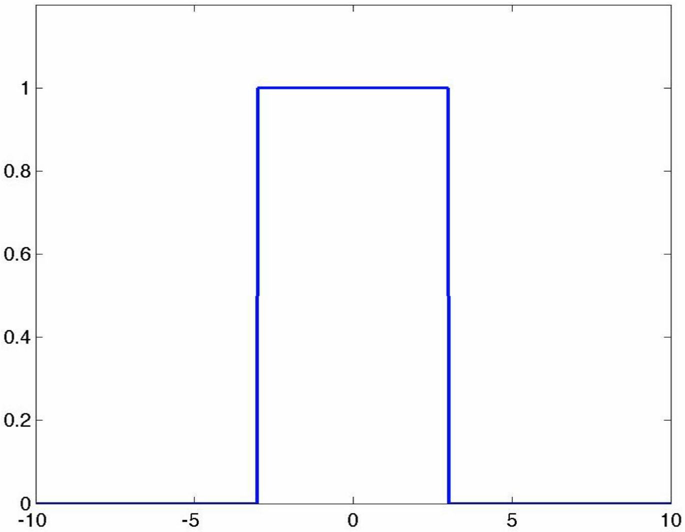
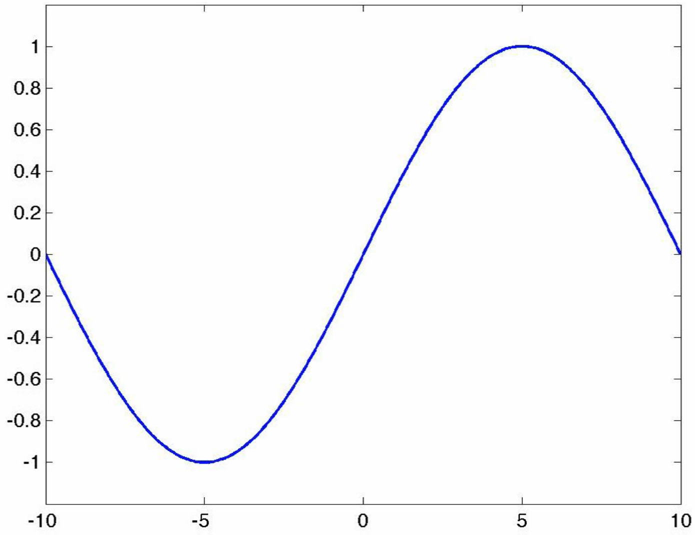


Fig. 2.5. The solution for an initial top hat displacement of a stationary, infinite string.


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-10
-5
0
5
10


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-10
-5
0
5
10

② - 4 : Réflexion et transmission d'ondes par des discontinuités en densité

Corde de densité ρ_1 pour $x < 0$ et ρ_2 pour $x > 0$:

Solution de la forme $y(x,t) = \begin{cases} f_I(x - c_1 t) + f_R(x + c_1 t) & \text{pour} \quad x < 0 \\ f_T(x - c_2 t) & \text{pour} \quad x > 0 \end{cases}$

1. $y(x,t)$ est solution ssi : $c_1 = \sqrt{T/\rho_1}$ et $c_2 = \sqrt{T/\rho_2}$.
2. Continuité du déplacement (y) : $f_I(-c_1 t) + f_R(c_1 t) = f_T(-c_2 t)$.
3. Continuité de la contrainte $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$: $f_I'(-c_1 t) + f_R'(c_1 t) = f_T'(-c_2 t)$.
4. Ces relations de continuité en $x = 0$ entrainent donc :

$$\begin{cases} f_T(x - c_2 t) = \dfrac{2 c_2}{c_1 + c_2} \, f_I \left[\dfrac{c_1}{c_2}(x - c_2 t) \right] \\ f_R(x + c_1 t) = \dfrac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2} \, f_I \left[-(x + c_1 t) \right] \end{cases}$$

CONCLUSION

- Célérité des ondes de vibration d'une corde tendue
- Problème aux conditions initiales dans un milieu infini
- Coefficient de réflexion et de transmission à travers des discontinuités