① CONCEPTS DE BASE

Basic Ideas

NHC33 : Dynamique des ondes

Olivier THUAL, 8 septembre 2019

Plan du livre “Wave Motion” de J. BILLINGHAM et A. C. KING :

- *un seul paragraphe*

AU PROGRAMME DU COURS

Cours oral :

- Tout le chapitre est au programme.

Pourront aussi être utilisés pour l'examen :

- Sans objet

Ne sont pas au programme :

- Néant

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Introduire les concepts génériques et les notations pour l'analyse des ondes dans les systèmes physiques, chimiques et biologiques étudiés dans les chapitres suivants.

- Etudier des exemples typiques d'équations aux dérivées partielles (EDP) dont les solutions sont des ondes.

- Présenter la "méthode de la phase stationnaire" et introduire la notion de vitesse de groupe.

Équation des ondes 1D et linéaire

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

Évolution du déplacement d'une corde tendue.

Principe de superposition

1. Si ϕ_1 et ϕ_2 sont solutions, $a_1\,\phi_1 + a_2\,\phi_2$ l'est aussi.
2. Si $\phi(x,t;K)$ sont des solutions, une nouvelle solution est

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,t;K)\,dK$$

Solutions de l'équation des ondes

3. $\phi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ est solution pour f et g arbitraires.
4. $\phi(x,t) = f(x-ct)$: onde progessive se propageant vers la droite.

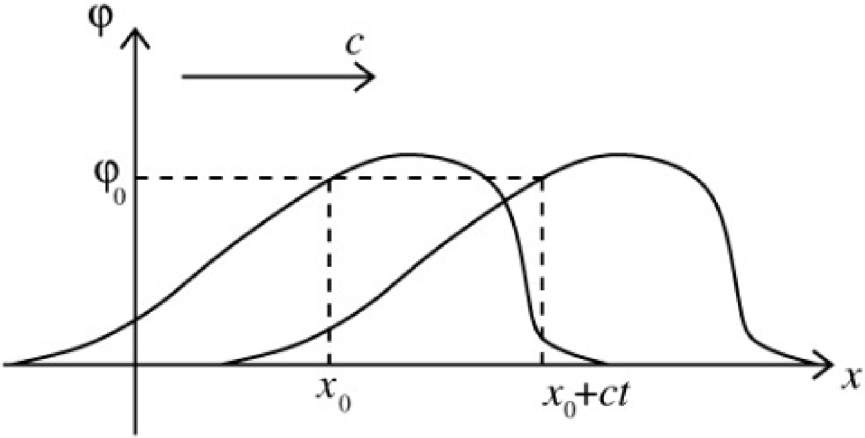


Fig. 1.1. A right-propagating travelling wave.

Onde périodique (ou harmonique)

- Solution complexe : $\phi = A\, e^{i(kx-\omega t)}$.
- Solution réelle : $\phi = \mathrm{Re}\left[A\, e^{i(kx-\omega t)}\right]$.

Propriétés d'une onde harmonique

1. On calcule $\phi = |A| \cos(k\,x - \omega\,t + \varphi)$ si $A = |A|\, e^{i\,\varphi}$
2. On peut définir :
   - le nombre d'onde k (m^{-1})
   - la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ (m)
   - la pulsation ω (s^{-1})
   - la période $T = 2\,\pi/\omega$ (s)
   - la fréquence $f = 1/T$ (Hz)
   - l'amplitude $|A|$
   - la vitesse de phase $c_p = \omega/k = \lambda/T$ (m/s)
3. $\phi = A\,\cos(kx - \omega t) + A\,\cos(k\,x + \omega\,t) = 2A\,\cos(k\,x)\,\cos(\omega\,t)$
   est une onde stationnaire d'enveloppe $2A\,\cos(kx)$.

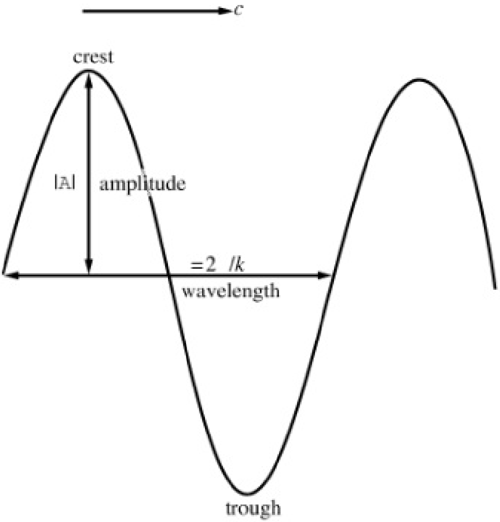


Fig. 1.2. The various quantities associated with a harmonic wave.

Équation des ondes 1D et linéaire

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$$

Onde périodique complexe

$$\phi = A\, e^{i(k\,x-\omega\,t)}$$

Relation de dispersion $\omega = \omega(k)$

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right) A\, e^{i(k\,x-\omega\,t)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \pm\, c\, k$$

Vitesse de phase : $c_p(k) = \omega(k)/k = \pm c$

Équation de Korteweg-de-Vries linéarisée

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

Modèle de propagation des ondes longues en eaux peu profondes.

1. La relation de dispersion $\omega = \omega(k)$ des ondes harmoniques $u = A\, e^{i(k\,x - \omega\, t)}$ est :

$$\omega = \alpha k + \beta k^3$$

2. La vitesse de phase $c_p(k) = \omega(k)/k$ est :

$$c_p = \alpha + \beta k^2$$

3. Les ondes longues sont plus rapides que les ondes courtes.
4. Le système est dispersif.

Équation de Klein-Glordon linéarisée

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 u = 0$$

Utilisée en mécanique quantique relativiste et en élasticité.

1. La relation de dispersion $\omega = \omega(k)$ est : $\omega = \pm\sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2}$
2. La superposition de deux ondes de nombre d'onde k et $k + \delta k$:

$$u = A \sin[kx - \omega(k)t] + A \sin[(k+\delta k)x - \omega(k+\delta k)t]$$

s'écrit $\quad u = 2A \cos\left\{\frac{1}{2}\delta k[x - \omega'(k)t]\right\} \sin\{kx - \omega(k)t\} + O(\delta k)$

en utilisant le développement limité :

$$\omega(k+\delta k) = \omega(k) + \omega'(k)\,\delta k + O[(\delta k)^2]$$

3. La vitesse de groupe est donc $c_g(k) = \omega'(k)$.

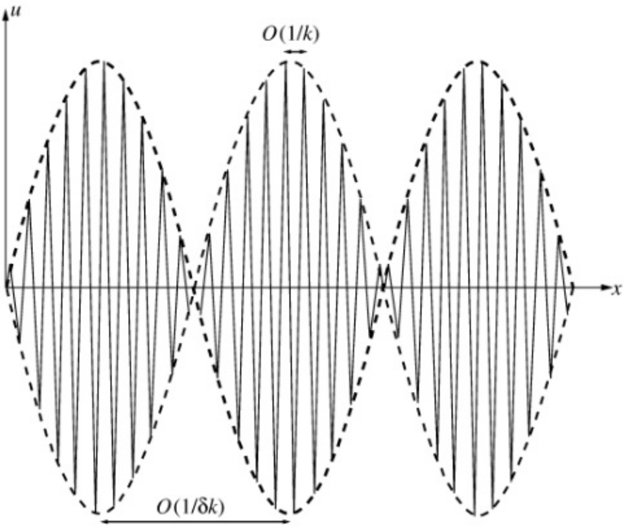
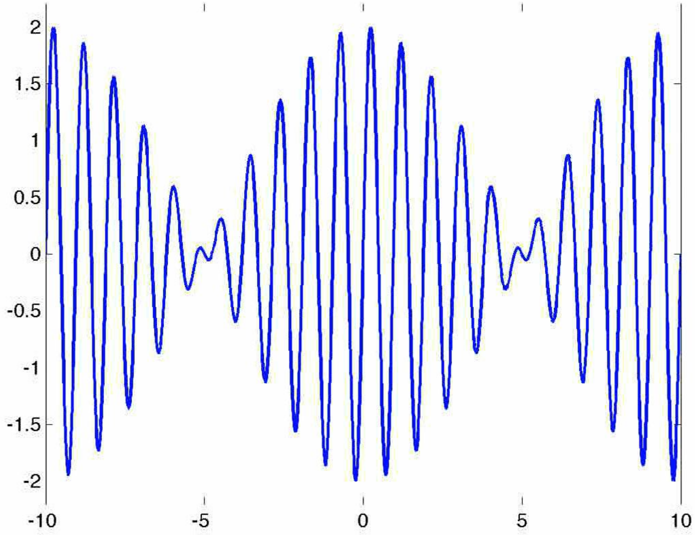
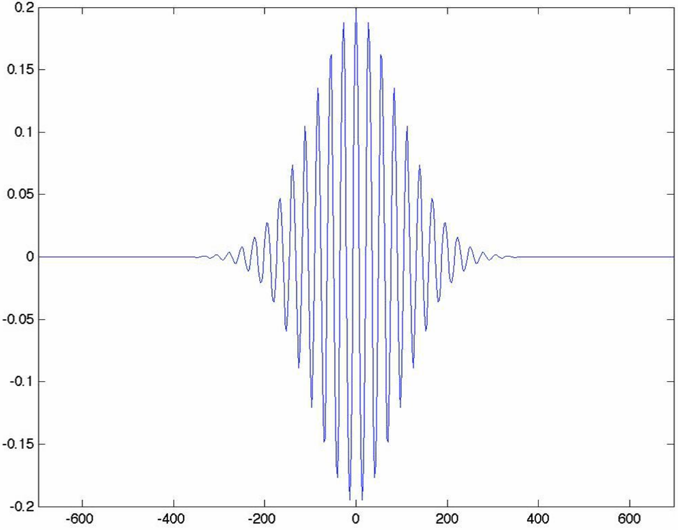


Fig. 1.3. The superposition of two time harmonic waves with wavenumbers differing by $\delta k \ll k$.

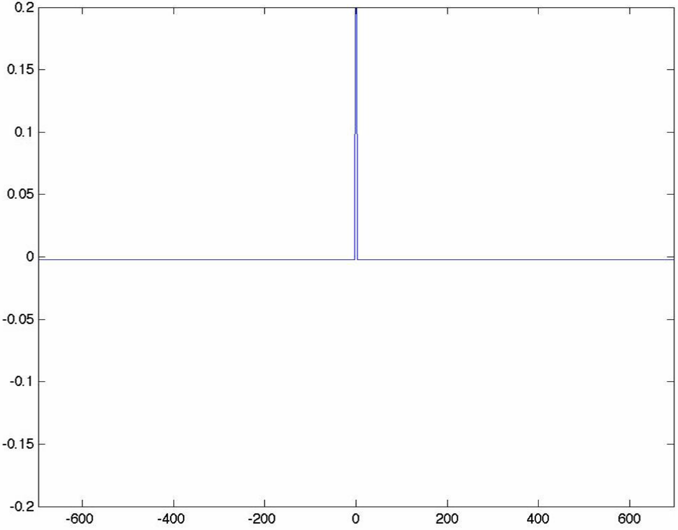
Superposition de deux ondes de vecteurs d'ondes proches

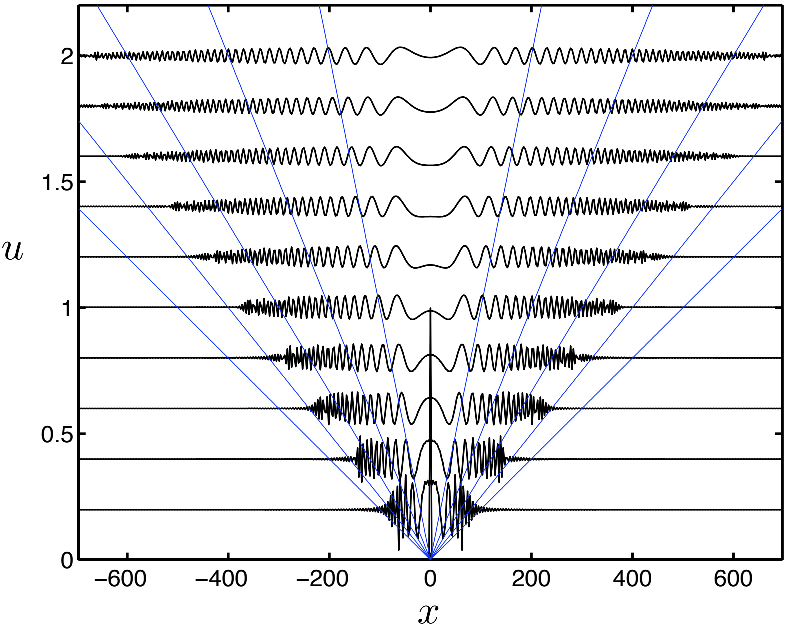


Paquets d'ondes localisés de l'équation de Klein-Gordon



Réponse implusionnelle de l'équation de Klein-Gordon

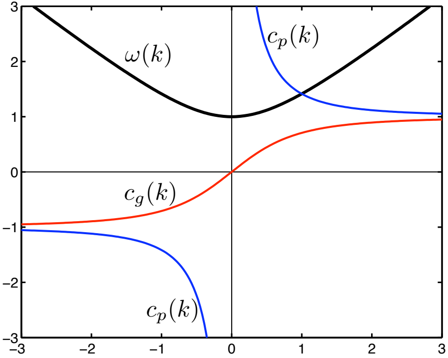


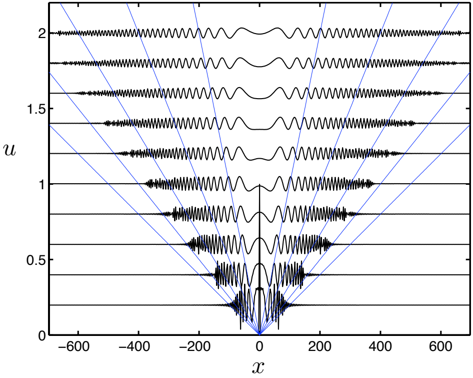

2
1.5
1
0.5
0
u
−600
−400
−200
0
200
400
600
x

Réponse impulsionnelle de l'équation de Klein Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 u = 0$$

Condition initiale : $u(x,0) = u_0\, \delta(x)$





Paquet d'ondes

$$\phi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i\,k\,x - i\,\omega(k)\,t}\, dk$$

1. On voit que $\phi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk$.
2. Transformée de Fourier inverse : $A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,0)\, e^{-i\,k\,x}\, dx$
3. En suivant la trajectoire $x = v\,t$ de vitesse v constante, on a

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i\,t\,[kv - \omega(k)]}\, dk$$

4. La méthode de la phase stationnaire pour t grand, conduit à :

$$\phi \sim A(k_0)\, e^{i\,t\,[k_0\,v - \omega(k_0)]} \left(\frac{2\pi}{t|\omega''(k_0)|} \right)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\{\omega''(k_0)\}}$$

où k_0 est solution de $v = \omega'(k_0) = c_g(k_0)$.

Méthode de la phase stationnaire

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\lambda g(s)}\, ds$$

On montre que, pour $\lambda \gg 1$

$$I(\lambda) \sim f(s_0) e^{i\lambda g(s_0)} \left(\frac{2\pi}{t|g''(s_0)|} \right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\{g''(s_0)\}}$$

où s_0 est le point stationnaire, supposé ici unique, tel que $g'(s_0) = 0$.

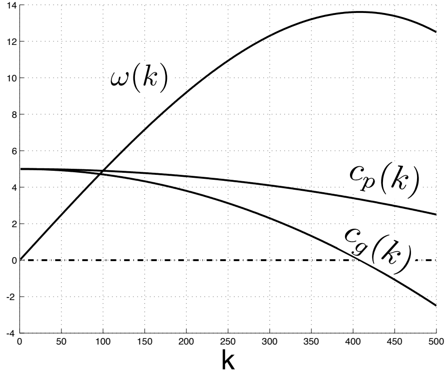
1. Application au cas $t \gg 1$ pour le suivi du paquet d'ondes :

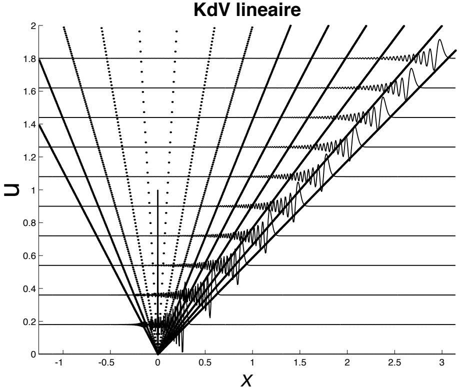
$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i\,t\,[k\,v - \omega(k)]}\, dk \\ &\sim A(k_0)\, e^{i\,t\,[k_0 v - \omega(k_0)]} \left(\frac{2\pi}{t|\omega''(k_0)|} \right)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\{\omega''(k_0)\}} \end{aligned}$$

Réponse impulsionnelle : équation de KdV linéaire

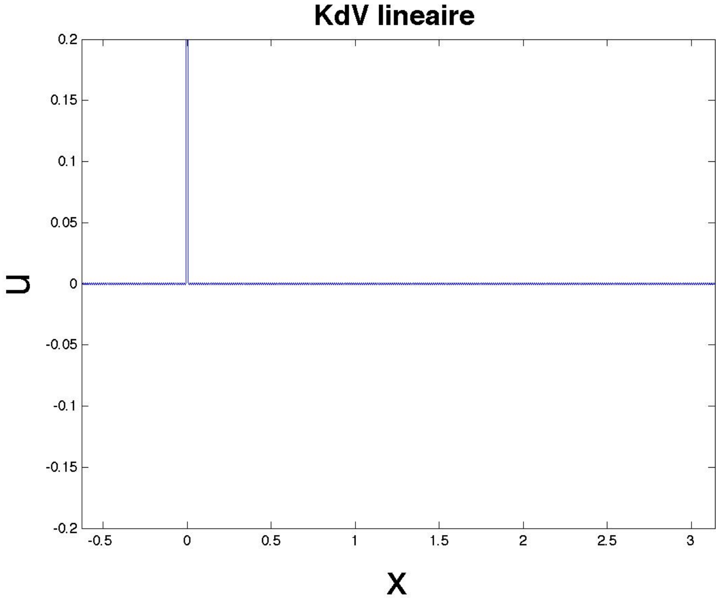
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \, \frac{\partial u}{\partial x} = \beta \, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

Condition initiale : $u(x,0) = u_0 \, \delta(x)$

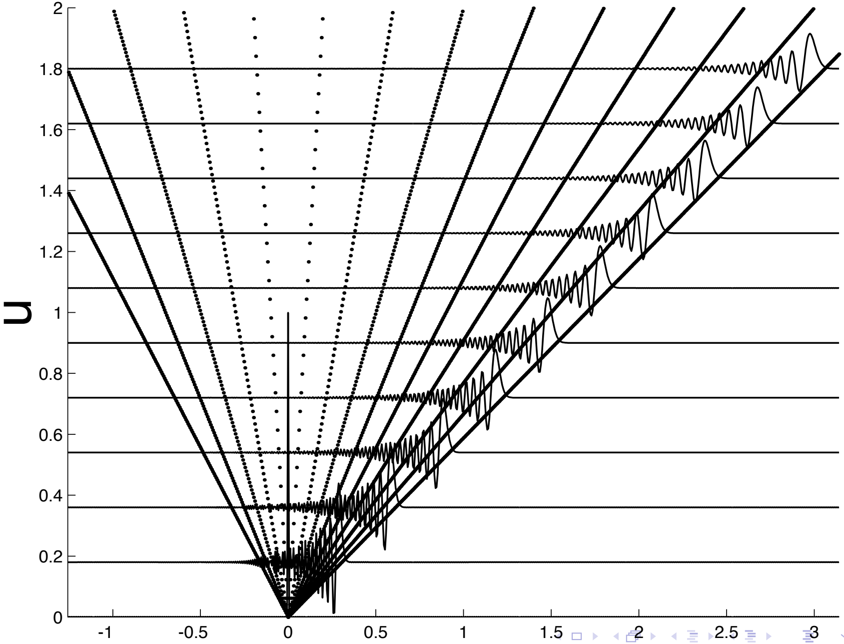




Réponse implusionnelle de l'équation de KdV linéaire



KdV lineaire



CONCLUSION

- Notions de base sur les ondes.
- Vitesse de groupe illustrée avec une paire d'ondes de longueurs d'ondes proches.
- Vitesse de groupe illustrée avec un paquet d'ondes quelconque (méthode de la phase stationnaire).
- La vitesse de groupe décrit la propagation de l'enveloppe d'un paquet d'ondes et donc de son énergie.

Bibliographie complémentaire

1. Des ondes et des fluides, O. THUAL, Éditions Cépaduès 2005
2. Articles Pédagogiques Multimedia, `http//thual.perso.enseeiht.fr/index.htm`