

# ⑦ FORMATION ET PROPAGATION DES ONDES DE CHOC

The Formation and Propagation of Shock Waves

NCH3C : Dynamique des ondes

Olivier THUAL, 13 septembre 2024

Plan du livre “Wave Motion” de J. BILLINGHAM et A. C. KING :

- ① Ondes de trafic
- ② (Dynamique des gaz compressibles)

## Cours oral :

- 7.1 Traffic Waves

## Pourront aussi être utilisés pour l'examen :

- Sans objet

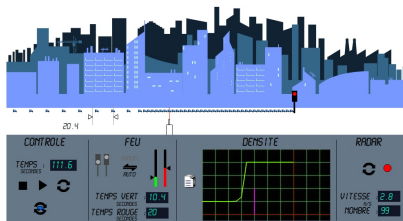
## Ne sont pas au programme :

- 7.2

# OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Introduire le concept de courbes ou droites caractéristiques sur un exemple très simple.
- Introduire la notion d'onde de détente et construire la solution à l'aide des caractéristiques.
- Introduire le concept d'onde de choc et calculer sa vitesse à partir de la loi de conservation écrite sous forme intégrale.

- Présenter le jeu sérieux [Modèle de trafic routier](#)



## ⑦ - 1 : ONDES DE TRAFIC

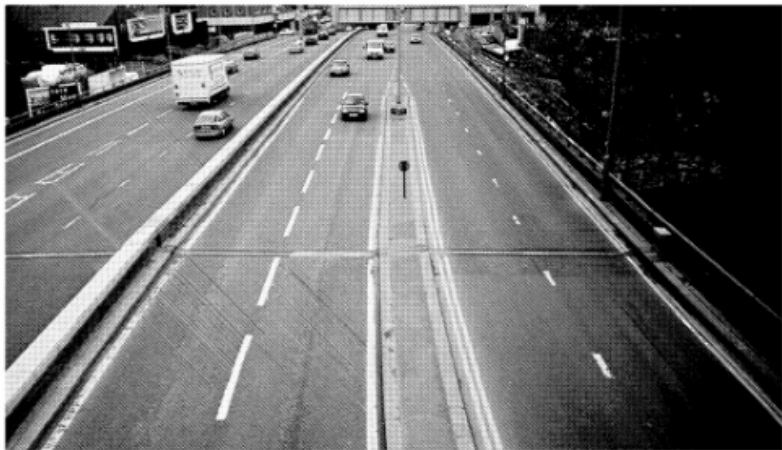


Fig. 7.1. Bunching in lines of traffic.

## ⑦ - 1.1 : Dérivation des équations du modèle

### Modèle de trafic routier

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx \right] = q(x_1, t) - q(x_2, t) \quad \text{avec} \quad q(\rho) = \rho v(\rho),$$

où  $\rho(x, t)$  est la densité de voitures et  $q[\rho(x, t)]$  est le flux des voitures.

- ① En dérivant par rapport à  $x_2$  pour  $x_1$  fixé :

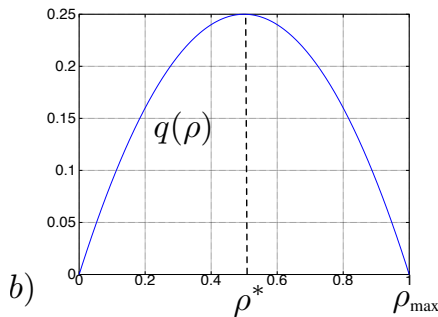
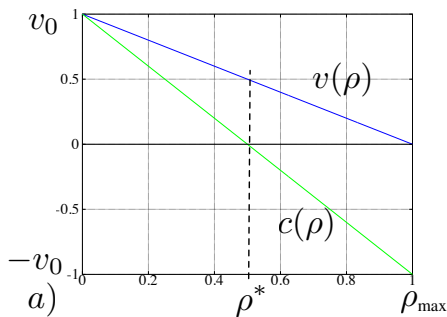
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

- ② En dérivant  $q[\rho(x, t)]$  par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad c(\rho) = q'(\rho).$$

# Exemple de flux quadratique

$$v(\rho) = v_0 \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)$$



$$c(\rho) = v_0 \left( 1 - 2 \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right), \quad q(\rho) = v_0 \rho \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)$$

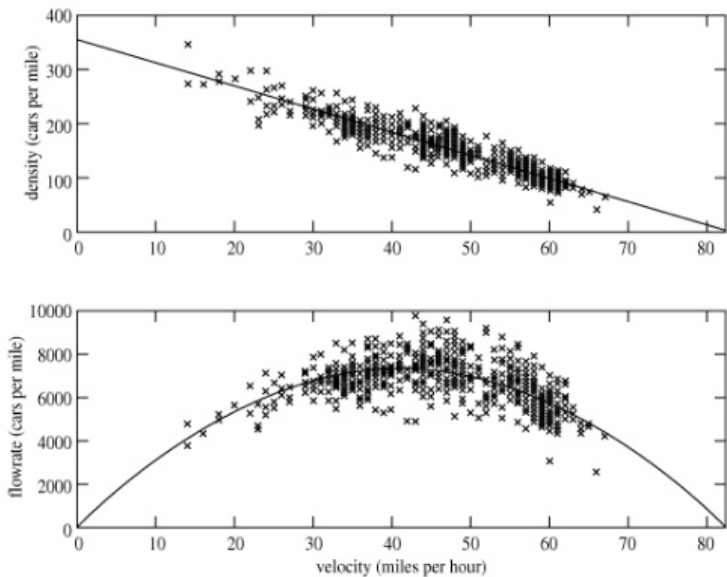


Fig. 7.2. Measured flowrate and density for a stretch of the M25 motorway between 7 a.m. and 7 p.m. on a weekday in 1999. Each data point is an average over one minute.

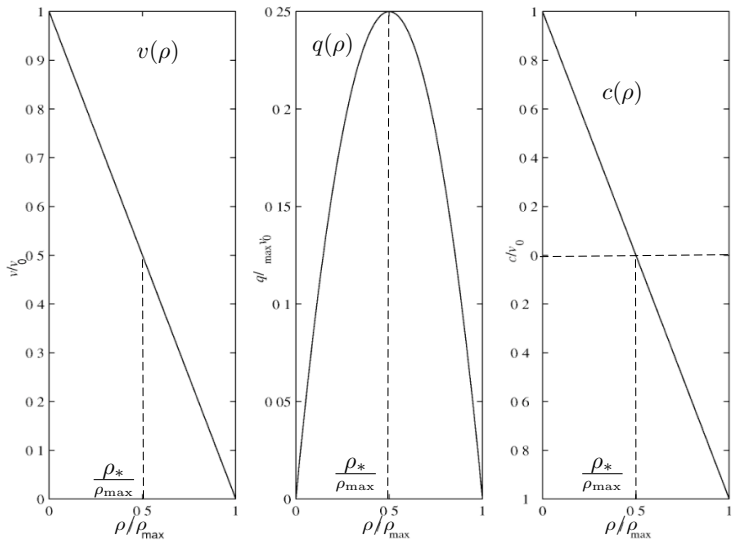


Fig. 7.3. The car velocity, flux function and kinematic wave speed given by (7.14).

## ⑦ - 1.2 : Petites perturbation d'un régime uniforme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

Perturbation d'un régime uniforme :  $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$  avec  $\tilde{\rho} \ll \rho$

- 1 Équation linéarisée en négligeant les termes non linéaires :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + c(\rho_0) \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = 0 \text{ en négligeant } c'(\rho_0) \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}, \text{ etc.}$$

- 2 Forme générale de ses solutions :

$$\tilde{\rho}(x, t) = f[x - c(\rho_0)t]$$

- 3 Équation des courbes  $x = X(t)$  le long desquelles  $\rho$  est constant :

$$x = X(t) = x_0 + c(\rho_0) t$$

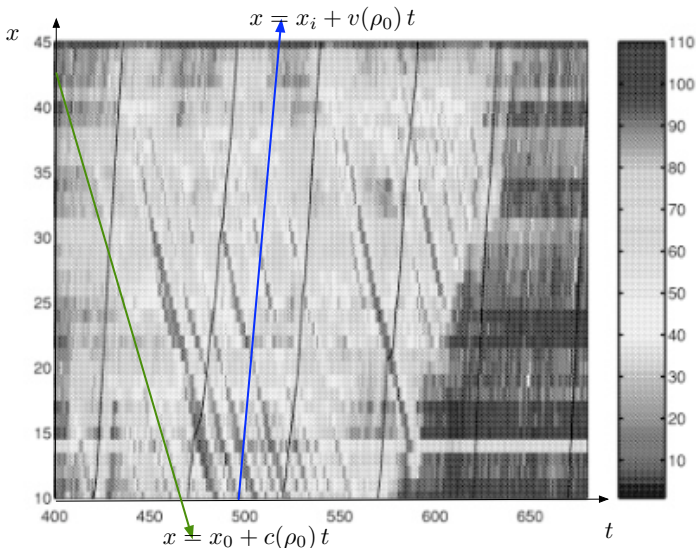


Fig. 7.4. Traffic on the M25 motorway on a busy morning. The horizontal axis is minutes past midnight, the vertical axis is distance in multiples of 500 m and the color scale indicates average speed in km/h. The black lines indicate the paths of six typical cars.

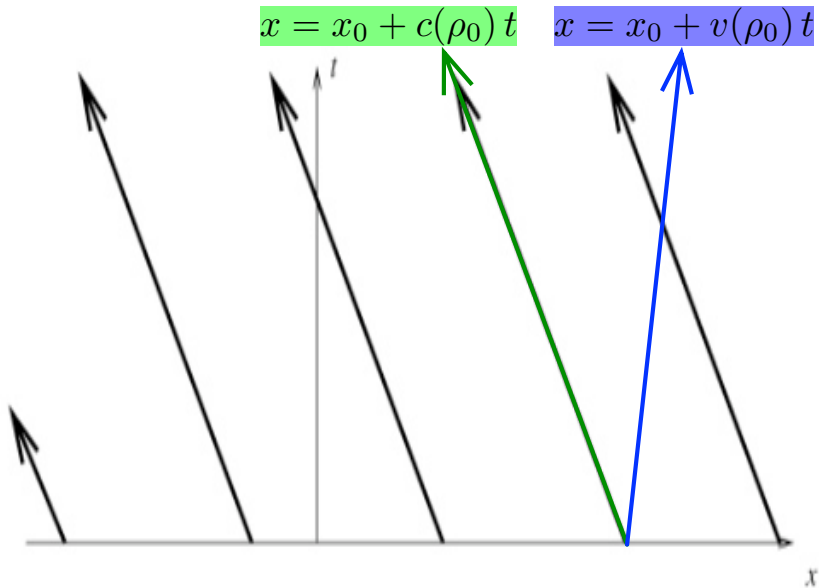


Fig. 7.5. The characteristics for the linearised problem.

## ⑦ - 1.3 : Problème aux conditions aux initiales

### Équation de conservation non linéaire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \text{avec comme condition initiale } \rho(x, 0) = \rho_0(x) .$$

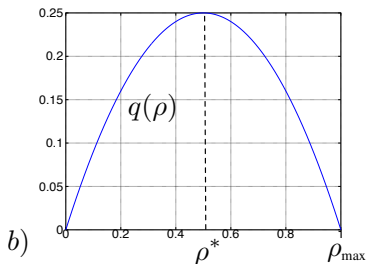
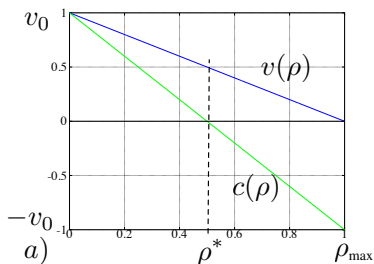
- ① Courbes caractéristiques  $x = X(t)$  sur lesquelles  $\rho$  est constant :

$$\frac{d}{dt} \{ \rho[X(t), t] \} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dX}{dt} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{dX}{dt} = c(\rho)$$

- ② Comme  $\rho[X(t), t] = \rho_0(x_0)$  est constant le long des caractéristiques,  $\frac{dX}{dt}$  l'est aussi. Les caractéristiques sont donc des droites :

$$x = x_0 + c[\rho_0(x_0)]t$$

$$v(\rho) = v_0 \left(1 - \rho/\rho_{\max}\right) \implies c(\rho) = v_0 \left(1 - 2\rho/\rho_{\max}\right)$$



- ➊ Condition initiale  $\rho_0(x) = \frac{\rho_L + \rho_R e^{x/L}}{1 + e^{x/L}}$  avec  $\rho_L > \rho_R$ .
- ➋ Comme  $\rho_0(x)$  est décroissante,  $c[\rho_0(x)]$  est croissante.
- ➌ Les caractéristiques forment donc un faisceau de droite divergentes
- ➍ On a donc un étalement du profil  $\rho(x, t)$ .

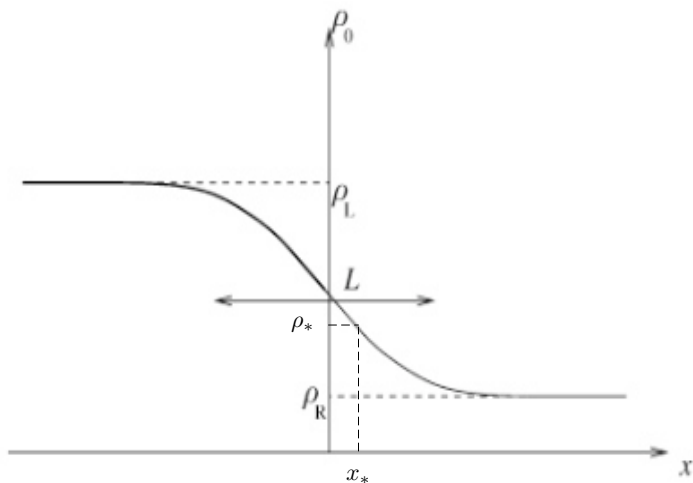


Fig. 7.6. The initial conditions for the initial value problem given by (7.16) with  $\rho_L > \rho_R$ .

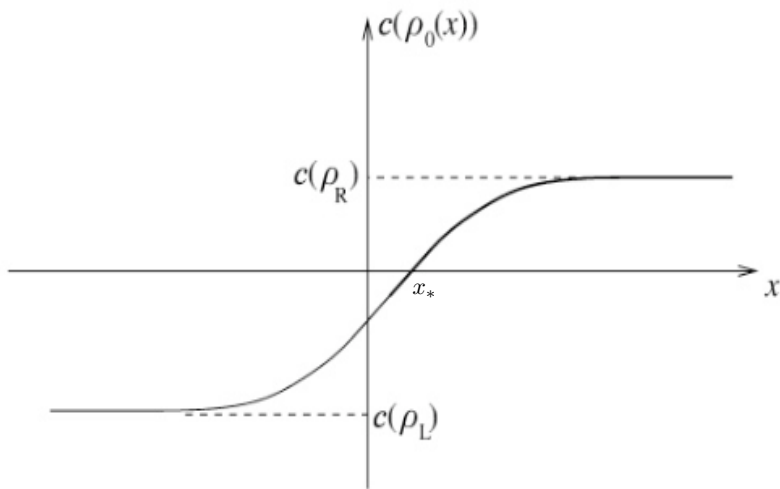


Fig. 7.7. The initial kinematic wave speed for the initial value problem given by (7.16) with  $\rho_L > \rho_R$ .

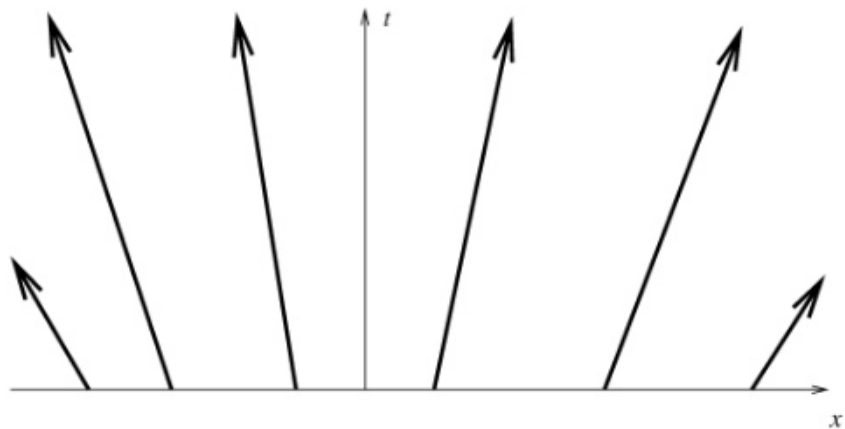


Fig. 7.8. The characteristics for the initial value problem given by (7.16) with  $\rho_L > \rho_R$ .

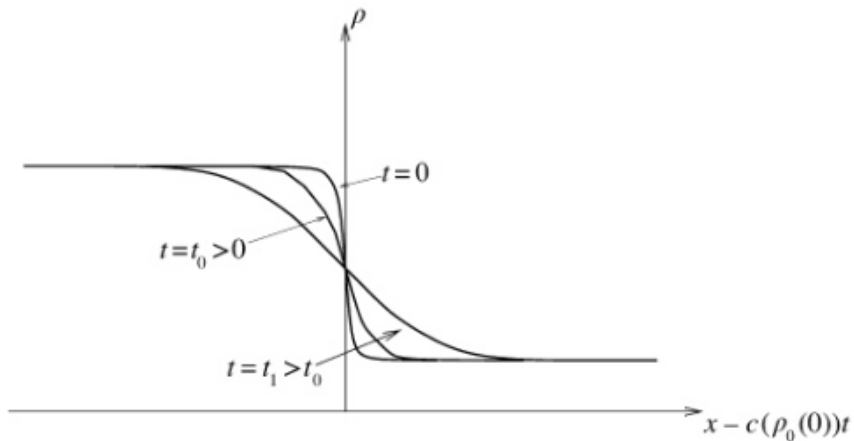


Fig. 7.9. The development of the car density for the initial value problem given by (7.16) with  $\rho_L > \rho_R$ .

## Cas limite $L \rightarrow 0$ et $\rho_L > \rho_R$ (onde de détente centrée)

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_L & \text{pour } x < 0 \\ \rho_R & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

① Les caractéristiques sont

$$\begin{cases} x = x_0 + c(\rho_L)t & \text{pour } x_0 < 0 \\ x = x_0 + c(\rho_R)t & \text{pour } x_0 > 0 \end{cases}$$

② L'équation  $c(\rho) = x/t$  s'écrit

$$c(\rho) = v_0 (1 - 2\rho/\rho_m) = \frac{x}{t}$$

③ On en déduit

$$\rho = \begin{cases} \rho_L & \text{pour } x \leq c(\rho_L)t \\ \frac{1}{2}\rho_m [1 - x/(v_0 t)] & \text{pour } c(\rho_L)t \leq x \leq c(\rho_R)t \\ \rho_R & \text{pour } x \geq c(\rho_R)t \end{cases} .$$

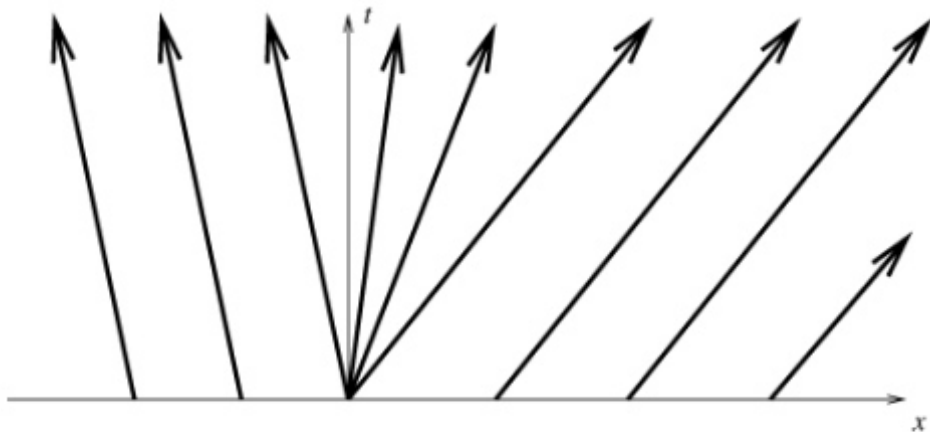


Fig. 7.10. The characteristics for the Riemann problem with  $\rho_L > \rho_R$ .

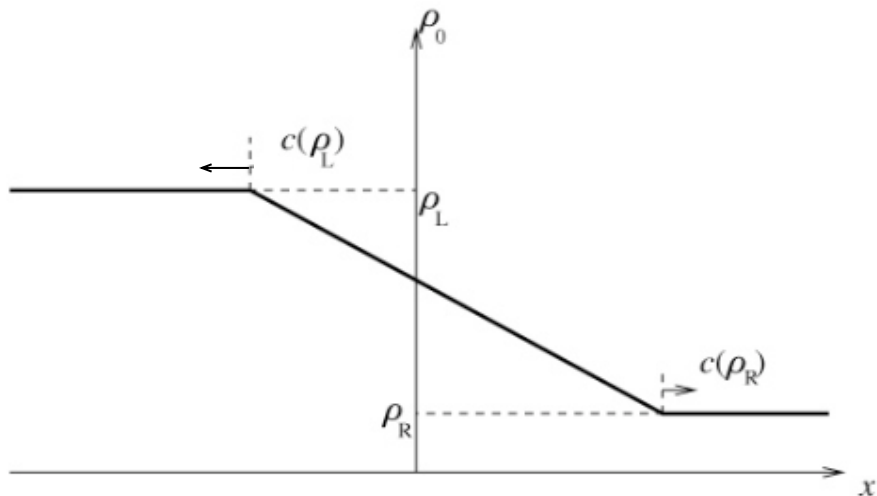
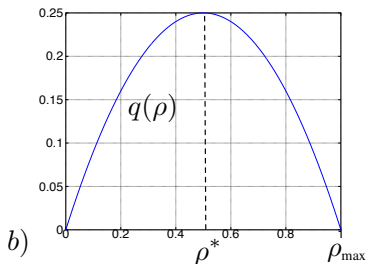
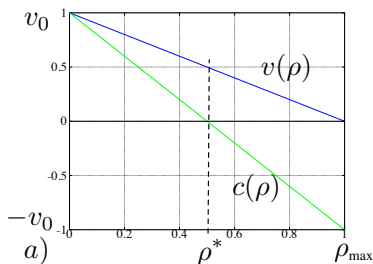


Fig. 7.11. The solution of the Riemann problem with  $\rho_L > \rho_R$ .

$$v(\rho) = v_0 \left(1 - \rho/\rho_{\max}\right) \implies c(\rho) = v_0 \left(1 - 2\rho/\rho_{\max}\right)$$



- 1 Condition initiale  $\rho_0(x) = \frac{\rho_L + \rho_R e^{x/L}}{1 + e^{x/L}}$  avec  $\rho_L < \rho_R$ .
- 2 Comme  $\rho_0(x)$  est croissante,  $c[\rho_0(x)]$  est décroissante.
- 3 Les caractéristiques forment donc un faisceau de droite divergentes
- 4 On a donc un resserrement du profil de  $\rho(x, t)$ .

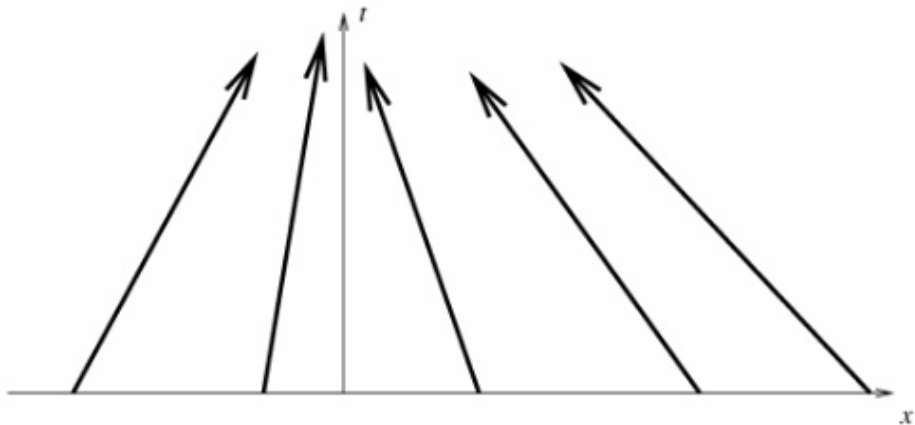


Fig. 7.12. The characteristics for the initial value problem given by (7.16),  $\rho_R > \rho_L$ .

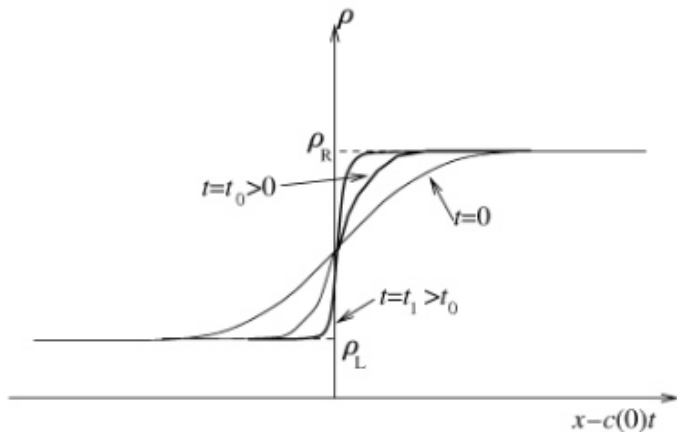


Fig. 7.14. The solution of the initial value problem given by (7.16) with  $\rho_R > \rho_L$  for  $t \leq T_{\min}$ .

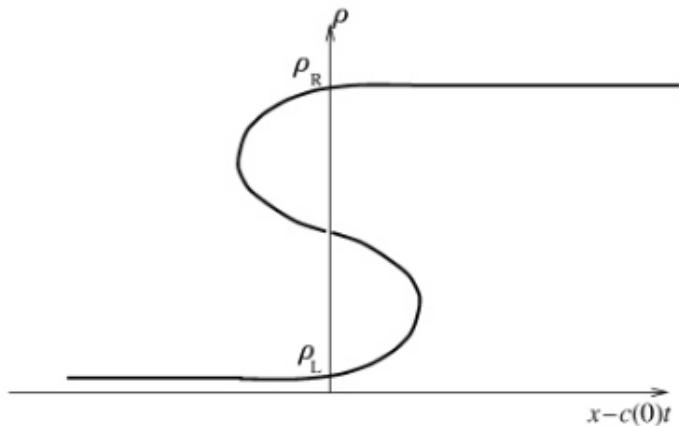


Fig. 7.15. The multi-valued solution of the initial value problem given by (7.16) with  $\rho_R > \rho_L$  for  $t > T_{\min}$ .

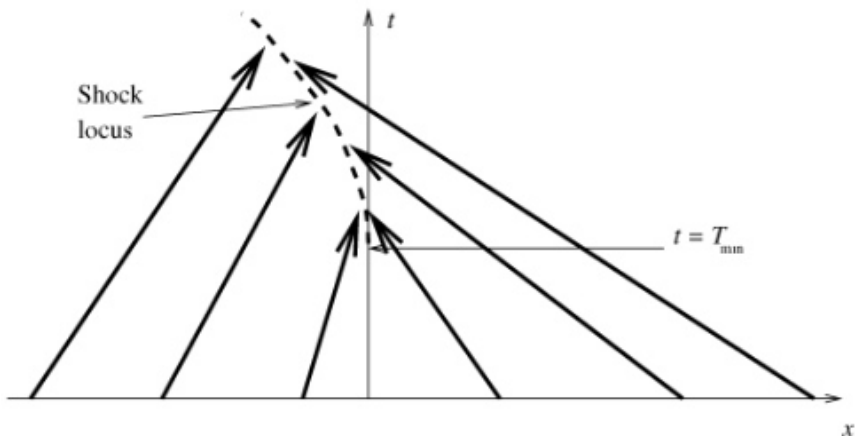


Fig. 7.17. The characteristics and shock locus for the initial value problem given by (7.16) with  $\rho_R > \rho_L$ .

## ⑦ - 1.4 : Vitesse du choc

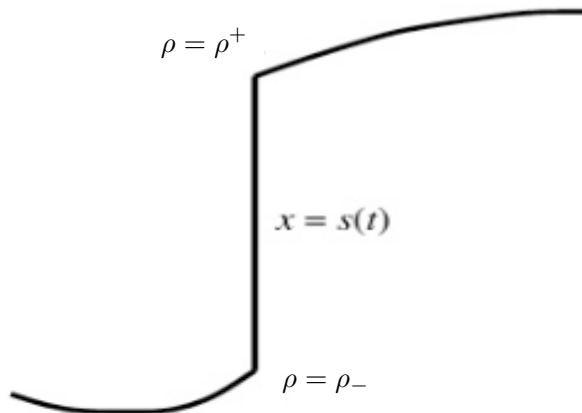


Fig. 7.18. A shock wave.

## Conservation du nombre de voitures sous forme intégrale

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{x_1}^{s(t)} \rho \, dx + \int_{s(t)}^{x_2} \rho \, dx \right] = q(x_1, t) - q(x_2, t) .$$

- ① En utilisant la formule de Leibnitz, on montre que

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx + \frac{ds}{dt} (\rho^- - \rho^+) = q(x_1, t) - q(x_2, t)$$

- ② En prenant la limite  $x_1 \rightarrow s(t)$  et  $x_2 \rightarrow s(t)$  on en déduit :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{q(\rho^-) - q(\rho^+)}{\rho^- - \rho^+}$$

- ③ Dans le cas de l'exemple de flux quadratique, on a

$$\frac{ds}{dt} = v_0 \left[ 1 - \frac{\rho^- + \rho^+}{\rho_{\max}} \right] = \frac{1}{2} [c(\rho^-) + c(\rho^+)]$$

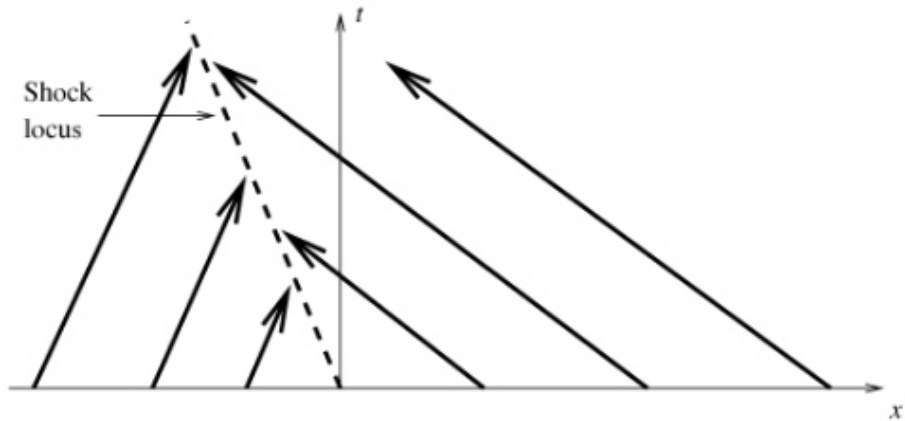
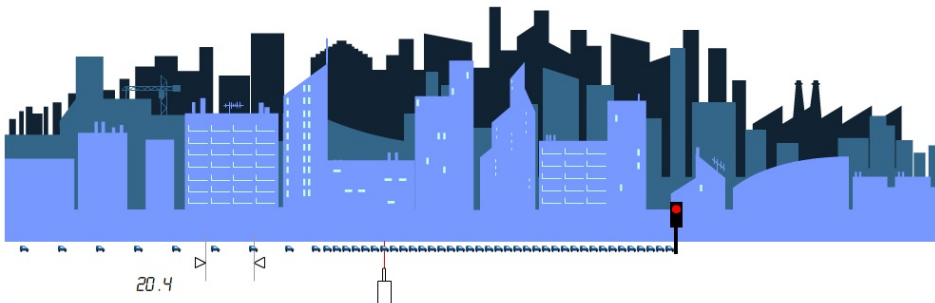


Fig. 7.19. The characteristics and shock locus for the Riemann problem with  $\rho_L < \rho_R$ .

# BE : Simulateur de Modèle de trafic routier



**CONTROLE**

TEMPS : **111.6**  
SECONDES

■ ▶ ↻

🔄

**FEU**

MANUEL  
AUTO

TEMPS VERT : **10.4**  
SECONDES

TEMPS ROUGE : **20**  
SECONDES

**DENSITE**

**RADAR**

🔄 ●

VITESSE : **2.8**  
M/S

NOMBRE : **99**

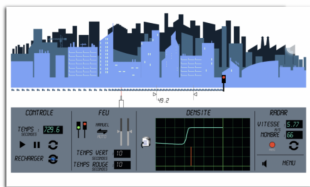
# Modèle de trafic routier et caractéristiques

Jean-François PARMENTIER et Olivier THUAL

Institut National Polytechnique de Toulouse

[Éditions des Ressources Pédagogiques Ouvertes de Toulouse](#)  
[INP](#)

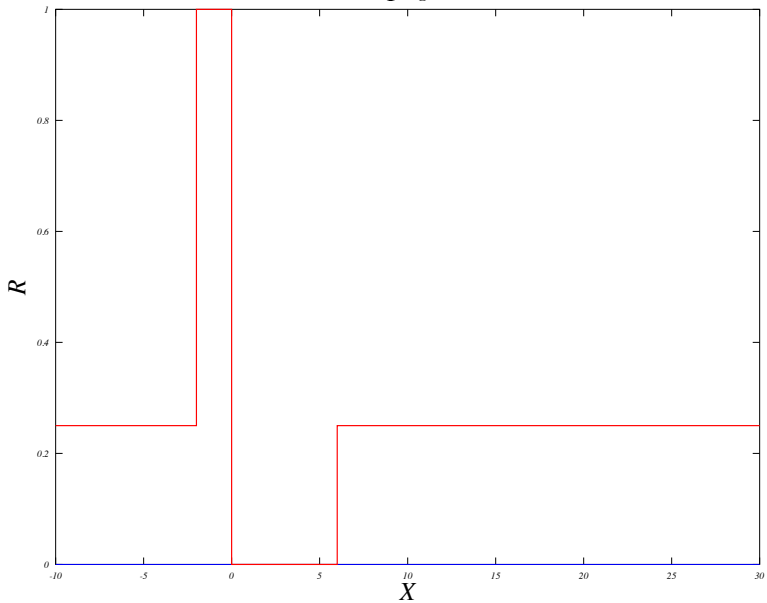
Version du 4 octobre 2021



Démarrer le module 

## Modèle de trafic routier et caractéristiques

$T=8$



$T=24$

