NB : seul document autorisé : le livre "Wave Motion". Calculatrices interdites. Sacs déposés au bas de l'amphi. Durée 1h45.

EXERCICE 0.1 Concepts de base

1) Calculer la partie réelle de $u(x,t) = A \exp[i\,(k\,x - \omega\,t)]$ pour $A = |A| \exp(i\,\varphi)$ complexe, k et ω réels, avec x la variable d'espace et t la variable de temps. Que désignent, pour cette onde, nombre d'onde, pulsation, fréquence, longueur d'onde, crête et creux de l'onde, amplitude. Illustrer ces notions à l'aide d'un dessin. À quelle condition cette onde périodique satisfait-elle l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$?
2) On considère $u = A\,\sin[k\,x - \omega(k)\,t] + A\,\sin[(k+\delta k)\,x - \omega(k+\delta k)\,t]$. Effectuer le développement limité de cette expression dans le cas $\delta k \ll k$. Qu'appelle-t-on vitesse de groupe ? Pourquoi ?
3) Calculer la relation de dispersion, la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'équation de Korteweg-de-Vries linéarisée $\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\,\frac{\partial u}{\partial x} = \beta\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ où α et β sont deux constantes réelles.

EXERCICE 0.2 Cordes tendues

4) Une corde est caractérisé par une tension $T = 56$ N et une masse linéique $\rho = 1,4\;10^{-3}$ kg.m^{-1}. Calculer la vitesse de propagation des ondes élastiques le long de cette corde. En déduire la fréquence de vibration du mode fondamental sachant que $L = 40$ cm.
5) On considère l'équation des ondes $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ pour $-\infty < x < \infty$ et $t \geq 0$ avec les conditions initiales $y(x,0) = a\,\sin(k\,x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$. Exprimer la solution $y(x,t)$ et tracer son allure pour plusieurs temps successifs.
6) On considère une corde tendue de densité linéique ρ_1 pour $x < 0$ et ρ_2 pour $x > 0$. On note T sa tension. On suppose que $y^-(x,t) = a\,\sin[k\,(x - c_1\,t)] + y_R(x + c_1\,t)$ pour $x \leq 0$ et $y^+(x,t) = y_T(x - c_2\,t)$ pour $x \geq 0$. Justifier la forme de cette solution et exprimer c_1 et c_2.
7) Justifier les conditions aux limites $y^-(0,t) = y^+(0,t)$ et $\frac{\partial y^-}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial y^+}{\partial x}(0,t)$ pour $t \geq 0$.
8) En notant $R = (c_1 - c_2)/(c_1 + c_2)$ et $T = 2\,c_2/(c_1 + c_2)$, en déduire que

$$y^-(x,t) = a\,\sin[k\,(x - c_1\,t)] + R\,a\,\sin[k\,(x + c_1\,t)] \text{ et } y^+(x,t) = T\,a\,\sin[k\,c_1\,(x - c_2\,t)/c_2]\;. \quad (1)$$

9) Calculer y^- et y^+ dans le cas $\rho_1 \ll \rho_2$ et dessiner l'allure de leur évolution temporelle.
10) Calculer y^- et y^+ dans le cas $\rho_2 \ll \rho_1$ et dessiner l'allure de leur évolution temporelle.

EXERCICE 0.3 Ondes sonores

On considère le modèle $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho\,\underline{u}) = 0$, $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\text{grad}}\;\underline{u} = -\frac{1}{\rho}\,\underline{\text{grad}}\;p$ et $\rho = \rho(p)$.

11) Interpréter les équations de ce modèle.
12) On considère les petites perturbations $p = p_0 + \widetilde{p}$, $\rho = \rho_0 + \widetilde{\rho}$ et $\underline{u} = \underline{\widetilde{u}}$ de l'équilibre $p = p_0$, $\rho = \rho_0 = \rho(p_0)$ et $\underline{u} = \underline{0}$. Écrire le système linéaire satisfait par ces petites perturbations en notant $1/c^2 = \frac{d\rho}{dp}(p_0)$. En déduire que $\Delta\widetilde{p} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \widetilde{p}}{\partial t^2}$.
13) On suppose que $p = B\,\rho^\gamma$ avec $\gamma = 1,4$. Calculer c pour $p_0 = 10^5$ Pa et $\rho_0 = 140$ g.m^{-3}.
14) On suppose $\underline{\text{rot}}\;\underline{\widetilde{u}} = \underline{0}$ à $t = t_0$. Montrer que l'on peut trouver un potentiel de vitesse acoustique ϕ tel que $\underline{\widetilde{u}} = \underline{\text{grad}}\;\phi$, $\widetilde{p} = -\rho_0\,\frac{\partial \phi}{\partial t}$ et $\Delta\phi = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$.

EXERCICE 0.4 Ondes de surface linéaires

On modélise le champ de vitesse $\underline{u}(x,y,t) = \underline{\text{grad}}\ \phi$ d'un écoulement à surface libre d'équation $y = \eta(x,t)$ par le modèle linéarisé $\Delta\phi = 0$ pour $-h \le y \le 0$ avec les conditions aux limites $\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\,\eta = 0$ et $\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial t}$ en $y = 0$ et $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$ en $y = -h$. La profondeur h est constante.

15) Décrire brièvement les étapes permettant d'obtenir ce modèle linéaire.
16) On cherche des solutions sous la forme $\phi(x,y,t) = F(x - c\,t)\ Y(y)$. Montrer que l'on a $\phi(x,y,t) = \phi_m\ \cosh[k(y+h)]\ \sin[k(x - c\,t + \varphi)]$ où ϕ_m, k et φ sont des constantes réeles.
17) Écrire les conditions aux limites de surface en éliminant η.
18) En déduire la relation de dispersion $\omega^2 = g\,k\ \tanh(k\,h)$ où $\omega = k\,c$ est la pulsation.
19) Que vaut c dans la limite des eaux peu profondes $h \ll \lambda$ où λ est la longueur d'onde ?
20) Que vaut c dans la limite des eaux très profondes $h \gg \lambda$ où λ est la longueur d'onde ?
21) On suppose que $\eta = a\ \cos[k(x - c\,t)]$. En déduire $\phi(x,y,t)$ en fonction de (a,g,k,h,x,y,t).

EXERCICE 0.5 Ondes dans les solides élastiques

En notant $\underline{u}(x_1,x_2,x_3)$ le champ de déplacement dans un solide élastique, les équations de Navier (Lamé) s'écrivent $\rho\,\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\,\underline{\text{grad}}\ (\text{div}\ \underline{u}) + \mu\,\Delta\underline{u}$. On suppose le milieu infini.

22) Donner la dimension des coefficients de Lamé λ et μ.
23) On cherche des solutions de l'équation de Navier sous la forme $\underline{u} = \underline{A}\ \exp[i\,(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega\,t)]$ où $\underline{k} = (k_1,k_2,k_3)$ est le vecteur d'onde et $\underline{A} \in \mathbb{C}^3$ est un vecteur d'amplitudes complexes. Montrer que $\rho\,\omega^2\,\underline{A} = (\lambda+\mu)(\underline{A}\cdot\underline{k})\,\underline{k} + \mu\,\|\underline{k}\|^2\,\underline{A}$.
24) En déduire que $\underline{A} = \underline{B}\ \exp(i\,\theta)$ avec $\underline{B} \in \mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire que l'on peut se ramener au cas $\underline{A} \in \mathbb{R}^3$ sans perte de généralité.
25) Projeter cette équation sur la droite parallèle à $\underline{k}$ puis sur le plan perpendiculaire à $\underline{k}$.
26) Montrer qu'une solution de cette équation correspond à une onde longitudinale avec $\underline{A}$ parallèle à $\underline{k}$ ou bien à une onde transversale vérifiant $\underline{A}\cdot\underline{k} = 0$.
27) En déduire la vitesse de phase pour chacun de ces types d'ondes.
28) En déduire qu'une onde élastique est la superposition d'ondes transversales et longitudinales.

EXERCICE 0.6 Ondes de choc

On considère le modèle de trafic routier $\frac{\partial\rho}{\partial t} + c(\rho)\,\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$ où $\rho(x,t)$ est la densité de voitures, $v(\rho) = v_0\,(\rho_{max} - \rho)/\rho_{max}$ leurs vitesses et $c(\rho) = q'(\rho)$ avec $q(\rho) = \rho\,v(\rho)$.

29) Tracer les fonctions $v(\rho)$, $c(\rho)$ et $q(\rho)$.
30) On considère une petite perturbation $\rho(x,t) = \rho_0 + \widetilde{\rho}(x,t)$ d'une régime homogène ρ_0 avec $\widetilde{\rho} \ll 1$. Montrer que $\widetilde{\rho} = f(x - c_0\,t)$ où f est une fonction arbitraire. Déterminer c_0.
31) On suppose que $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ avec $\rho_0(x) = \rho_{max}/(1 + e^{x/L})$ où L est constante positive. Tracer cette fonction.
32) Tracer les droites caractéristiques associées à cette condition initiale.
33) Trace schématiquement la solution $\rho(x,t)$ issue de cette condition initiale pour plusieurs temps successifs.
34) Que se passe-t-il dans la limite $L \to 0$? On appelle "onde de détente centrée" ce cas limite.
35) Montrer que $\rho(x,t) = \frac{1}{2}\rho_{max}[1 - x/(v_0\,t)]$ pour $x \in [X_L(t), X_R(t)]$ dans le cas de l'onde de détente centrée où $X_L(t)$ et $X_R(t)$ sont des fonctions que l'on déterminera.