Durée de l'examen : 1h45. Seul document autorisé : le formulaire. Calculatrices interdites.

EXERCICE 0.1 Questions courtes

Algèbre linéaire et tenseurs

Soit $\underline{U}(\underline{x})$ un champ de vecteurs et $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ un champ de matrices symétriques. On note $\underline{\underline{K}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{U}(\underline{x})$ le champ de gradient, $\underline{\underline{D}}(\underline{x})$ sa partie symétrique et $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x})$ sa partie antisymétrique.

1) Exprimer $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\Omega}}$ en utilisant la convention d'Einstein. En déduire que $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$.
2) Montrer que $\underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U} - \text{div}\ (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U}) = C\ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$ où C est une constant que l'on exprimera.

Hypothèse du continu

On considère le champ de température $T(x, y, z, t)$ d'un milieu continu compris en deux plaques planes d'équations respectives $z = 0$ et $z = l$. On suppose qu'il n'y pas de source de chaleur à l'intérieur du milieu, que le température en $z = l$ est maintenue fixe à une valeur $T_0 = 20°$ C et que la plaque en $z = 0$ est isolante.

3) Vers quel état d'équilibre converge le champ de température ?

Petites et grandes déformations

On considère la déformation $\underline{X}(\underline{a}) = (a_1 + k\,\eta\, a_3^2)\,\underline{e}_1 + a_2\,\underline{e}_2 + (a_3 + \eta\, a_3)\,\underline{e}_3$ où k et η sont des constantes. On suppose que $\eta \ll 1$.

4) Exprimer les tenseurs de petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$.
5) On considère le petit vecteur $\underline{\delta a} = \delta l\,(\underline{e}_1 + \underline{e}_3)$ autour du point $\underline{a} = \underline{e}_3/k$. Calculer son alongement relatif $(\|\underline{\delta x}\| - \|\underline{\delta a}\|)/\|\underline{\delta a}\|$ où $\underline{\delta x}$ est l'image de $\underline{\delta a}$ par la déformation.

Tenseur des contraintes

On considère un corps de volume V, contenu dans le domaine $\mathcal{D}$, en équilibre dans un fluide au repos de pression $p = p_a - \beta\, z$ où z est la coordonnée verticale et p_a et β des constantes.

6) Exprimer les tenseur de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z)$.
7) Calculer la résultante des forces de contact exercées par le fluide sur la frontière $\partial\mathcal{D}$ dans le cas où $p_a = 10^5$ Pa, $\beta = 10^4$ N.m^{-3} et $V = 1$ m^3.

Équations de Lamé

On considère le champ de déplacements $\underline{\xi}(\underline{a}) = k\,\eta\, a_3^2\,\underline{e}_1 + \eta\, a_3\,\underline{e}_3$ où k et η sont des constantes. On suppose que $\eta \ll 1$. On note λ et μ les coefficients de Lamé d'un solide de volume V soumis à cette petite déformation.

8) Calculer la résultante des forces de contact exercées sur la frontière $\partial\mathcal{D}$ dans le cas $\lambda = 2\,10^9$ Pa, $\mu = 10^9$ Pa, $\eta = 10^{-2}$, $k = 1$ m^{-1} et $V = 1$ m^3.

EXERCICE 0.2 Minimisation de la puissance Poiseuille - Couette

La microfluidique s'intéresse à la dynamique des fluides dans des domaines de petites tailles. Certains procédés permettent de les mettre en mouvement à l'aide de forces électriques. On cherche ici à minimiser l'énergie nécessaire pour imposer un débit donné à un tel écoulement.

On suppose que le fluide est newtonien de coefficient de Lamé λ_n et μ_n. L'écoulement est stationnaire, de masse volumique ρ_0 constante et de vitesse $\underline{U} = U(z)\,\underline{e}_x$. On note $p(x,y,z)$ le champ de pression. La vitesse est nulle sur la plaque d'équation $z=-l$ et une force de surface $\underline{T}_l = -p_l\,\underline{e}_z + F\,\underline{e}_x$ constante impose une vitesse $U_*\,\underline{e}_x$ sur la plaque d'équation $z=l$ (figure 1). Le fluide est soumis à une force extérieure de volume constante $\underline{f}(\underline{x}) = f\,\underline{e}_x$. Cette pompe microfluidique étant embarquée dans un satellite, les forces de gravité sont nulles.

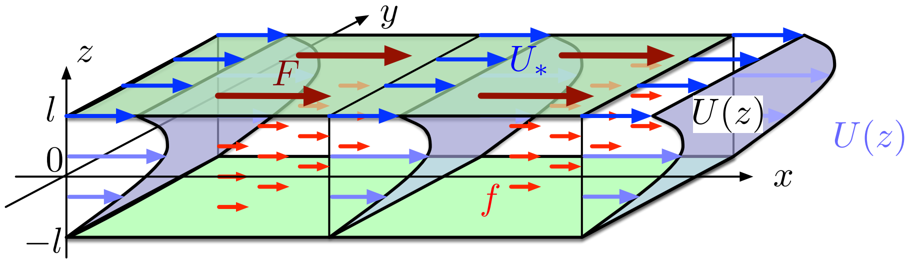

FIGURE 1 – *Écoulement entrainé par des forces électriques volumiques (f) et surfaciques (F).*

9) Montrer que les hypothèses sont compatibles avec l'équation de conservation de la masse.
10) Expliciter les composantes du champ d'accélération $\frac{d\underline{U}}{dt}$ puis calculer leurs valeurs.
11) Écrire la loi de conservation de la quantité de mouvement en projection sur les axes.
12) On suppose que $\underline{\text{grad}}\,p \cdot \underline{e}_x = 0$. En déduire que $p = p_0$ où p_0 est une constante.
13) Montrer que $U''(z) = -2\,\beta$ où β est une constante que l'on explicitera.
14) En déduire que $U(z) = U_p\,\phi_p\left(\frac{z}{l}\right) + U_c\,\phi_c\left(\frac{z}{l}\right)$ avec $\phi_p(\zeta) = 1-\zeta^2$ et $\phi_c(\zeta) = \frac{1}{2}(1+\zeta)$. Expliciter les constantes U_p et U_c en fonction de β, l et U_*.
15) On note $V = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} U(z)\,dz$ la vitesse débitante. Calculer sa valeur dans le cas $U_p = 0$.
16) Calculer la valeur de la vitesse débitante dans le cas $U_c = 0$.
17) On note désormais $U(z) = \frac{3}{2}\,V_p\,\phi_p\left(\frac{z}{l}\right) + 2\,V_c\,\phi_c\left(\frac{z}{l}\right)$. Montrer que $V = C_1\,(V_p + V_c)$ et $f = 3\,C_2\,\mu_n\,V_p/l^2$ où C_1 et C_2 sont des constantes que l'on explicitera.
18) Montrer que le tenseur des contraintes s'écrit $\underline{\underline{\sigma}} = -p_0\,\underline{\underline{I}} + C_3\,U'(z)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x)$ où C_3 est une constante que l'on explicitera. En déduire que $p_0 = p_l$.
19) En déduire aussi que $F = C_4\,\mu_n\,(V_c - 3\,V_p)/l$ où C_4 est une constante que l'on explicitera.
20) Que représentent $P_F = F\,U_*$, $P_f = \int_{-l}^{l} f\,U(z)\,dz$ et $P = P_F + P_f$? Quelles sont leurs unités ? Montrer que $P = C_5\,(3\,V_p^2 + V_c^2)$ où C_5 est une constante que l'on explicitera.
21) Justifier que $P = -\int_{-l}^{l} \pi_{\text{int}}\,dz$ avec $\pi_{\text{int}} = -\mu_n\,[U'(z)]^2$ et vérifier cette égalité.
22) Comment choisir V_p/V_c pour minimiser l'énergie à débit V fixé ?
23) Exprimer alors P_F, P_f et P en fonction de μ_n, l et V pour ce choix optimal ?
24) Comparer cette valeur $P = P_{opt}$ avec celles obtenues pour $V_p = 0$ puis pour $V_c = 0$.
25) Dessiner le profil de vitesse pour $P = P_{opt}$. Cet optimum énergétique est-il réalisable ?

$\boxed{\text{Corrigé}}$ Questions courtes

Algèbre linéaire et tenseurs

1)On $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\Omega}} = \sigma_{ij}\,\Omega_{ji} = -\sigma_{ji}\,\Omega_{ij} = -\sigma_{kl}\,\Omega_{lk} = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\Omega}}$, donc $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\Omega}} = 0$. On en déduit $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\Omega}}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$. **2)**On a $A = \underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}\,U_k$ et $B = \text{div}\,(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U}) = \frac{\partial(\sigma_{ij}\,U_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}\,U_j + \sigma_{ij}\,\frac{\partial U_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l}\,U_k + \sigma_{lk}\,\frac{\partial U_k}{\partial x_l}$. Comme $\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$, on a $A - B = -\sigma_{lk}\,K_{kl}$ avec $K_{kl} = \frac{\partial U_k}{\partial x_l}$. On en déduit $A - B = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{K}} = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$. Donc $C = -1$.

Hypothèse du continu

3)L'équation de la chaleur avec $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ et $r = 0$ conduit à $\Delta T = 0$. La géométrie impose $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0$. On a donc $T''(z) = 0$ avec les conditions aux limites $T(0) = 0$ et $T'(l) = 0$. La seule solution est $T = T_0$.

Petites et grandes déformations

4)Comme $\xi(\underline{a}) = k\,\eta\,a_3^2\,\underline{e}_1 + \eta\,a_3\,\underline{e}_3$, on a $\underline{\underline{H}}(\underline{a}) = 2\,k\,\eta\,a_3\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \eta\,\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ et donc $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a}) = k\,\eta\,a_3\,(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \eta\,\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$. **5)**Comme $\underline{a} = \underline{e}_3/k$, on a $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a}) = \eta\,(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \eta\,\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$. L'allongement relatif est $\Delta = 2\,\underline{\delta a} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\delta a}/\underline{\delta a}^2 = 3\,\eta$.

Tenseur des contraintes

6)On a $\underline{\underline{\sigma}} = (-p_a + \beta\,z)\,\underline{\underline{I}}$. **7)**On a $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\,dS = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\sigma}}\,d^3x = \iiint_{\mathcal{D}} \beta\,\underline{e}_z\,d^3x = \beta\,V\,\underline{e}_z = 10^4\,\underline{e}_z$ N.

Équations de Lamé

8)Comme $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a}) = k\,\eta\,a_3\,(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \eta\,\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$, on a $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\,\text{tr}\,\underline{\underline{\epsilon}}\,\underline{\underline{I}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{\epsilon}} = \lambda\,\eta(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + (\lambda + 2\,\mu)\,\eta\,\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + 2\,k\,\eta\,a_3\,(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1)$. On a $\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\,dS = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\sigma}}\,d^3x = \iiint_{\mathcal{D}} 2\,\mu\,k\,\eta\,\underline{e}_x\,d^3x = 2\,\mu\,k\,\eta\,V\,\underline{e}_x = 2\,10^7\,\underline{e}_x$ N.

$\boxed{\text{Corrigé}}$ Minimisation de la puissance Poiseuille - Couette

9)La loi de conservation de la masse $\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\text{div}\,\underline{U} = 0$ est vérifiée car $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + U\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ et $\text{div}\,\underline{U} = \frac{\partial U}{\partial x} = 0$. **10)**Les composantes de $\frac{d\underline{U}}{dt}$ sont $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + w\,\frac{\partial v}{\partial z}$ et $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial x} + v\,\frac{\partial w}{\partial y} + w\,\frac{\partial w}{\partial z}$. Ces douze termes sont nuls et donc $\frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{0}$. **11)**Les composantes de la loi de conservation de la quantité de mouvement $\rho_0\,\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\underline{\text{grad}}\;p + \underline{f} + (\lambda_n + \mu_n)\,\underline{\text{grad}}\;(\text{div}\;\underline{U}) + \mu_n\,\underline{\Delta}\,\underline{U}$ s'écrivent $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + f + \mu_n U''(z)$, $0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{\partial p}{\partial x}$. **12)**Comme $\underline{\text{grad}}\;p \cdot \underline{e}_x = \frac{\partial p}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$, la pression p est constante. **13)**On a $U''(z) = -f/\mu_n$ d'où $\beta = f/(2\,\mu_n)$. **14)**En intégrant deux fois $U'' = -2\,\beta$, on a $U(z) = -\beta\,z^2 + A\,z + B$ où A et B sont des constantes. Les conditions aux limites $U(-l) = 0$ et $U(l) = U_c$ conduisent à $A = U_c/(2\,l)$ et $B = U_c/2 + \beta\,l^2$. On en déduit $U_p = \beta\,l^2$ et $U_c = U_*$. **15)**Dans le cas $U(z) = \frac{1}{2}\,U_c\,(1 + z/l)$, on a $V = \frac{U_c}{4}\int_{-1}^{1}(1 + \zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2}\,U_c$. **16)**Dans le cas $U(z) = U_p\,[1 - (z/l)^2]$, on a $V = \frac{U_p}{2}\int_{-1}^{1}(1 - \zeta^2)\,d\zeta = \frac{2}{3}\,U_p$. **17)**On a $V = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{3}{2}V_p\,(1 - \zeta^2) + 2\,V_c(1 + \zeta)\right]\,d\zeta = V_p + V_c$. Comme $U_p = \beta\,l^2 = f\,l^2/(2\,\mu_n)$ et $U_p = \frac{3}{2}\,V_p$, on a $f = \frac{3\,\mu_n}{l^2}\,V_p$. Donc $C_1 = C_2 = 1$. **18)**Comme $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}\,U'(z)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x)$ et $\underline{\underline{\sigma}} = -p_0\,\underline{\underline{I}} + 2\,\mu_n\,\underline{\underline{D}}$, on a $C_3 = \mu_n$. Par définition du tenseur des constrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z = \underline{T}_l$ en $z = l$. En projettant sur $\underline{e}_z$, on obtient $p_0 = p_l$. **19)**Comme

$\underline{T}_l = \underline{\underline{\sigma}}(x,y,l)\cdot\underline{e}_z = -p_l\,\underline{e}_x + \mu_n\,U'(l)\,\underline{e}_x$, $\underline{T}_l = F\,\underline{e}_x$ et $U'(z) = \frac{1}{l}\,(V_c - 3\,V_p\,\frac{z}{l})$, on a $F = \frac{\mu_n}{l}(V_c - 3\,V_p)$. On a donc $C_4 = 1$. **20)**La puissance des forces de contact $\underline{T}_l = F\,\underline{e}_x$ exercées sur une surface $\mathcal{A}$ d'aire A est $A\,P_F$ avec $P_F = F\,U_*$. La puissance des forces extérieures de volume exercées sur un domaine $\mathcal{D} = \mathcal{A}\times[-l,l]$ est $A\,P_f$. L'unité des puissances surfaciques des forces de contact P_F et des forces de volumes P_f est le W.m^{-2}. Comme $U_* = U_c$, et $U_c = 2\,V_c$, a $P_F = F\,U_c = \frac{\mu_n}{l}(V_c - 3\,V_p)\,(2\,V_c) = \frac{\mu_n}{l}(2\,V_c^2 - 6\,V_p\,V_c)$. Comme $V = \frac{1}{2\,l}\int_{-l}^{l} U(z)dz = V_p + V_c$ et $f = \frac{3\,\mu_n}{l^2}\,V_p$, on a $P_f = \int_{-l}^{l} f\,U(z)dz = f\,(2\,l\,V) = \frac{\mu_n}{l}(6\,V_p^2 + 6\,V_p\,V_c)$. On en déduit que $P = \frac{2\,\mu_n}{l}\,(3\,V_p^2 + V_c^2)$. D'où $C_5 = 2\,\mu_n/l$. **21)**La puissance des forces intérieures de contact dans le domaine $\mathcal{D}$ est $A\,P_{int}$ avec $P_{int} = \int_{-l}^{l}\pi_{\text{int}}\,dz$ et $\pi_{\text{int}} = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$. La loi de conservation de l'énergie totale entraine que $P_{int} + P = 0$ où $P = P_F + P_f$ est la somme des puissances surfaciques extérieures. On vérifie que $\pi_{\text{int}} = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} = -\mu_n\,[U'(z)]^2$ à l'aide des expressions de $\underline{\underline{D}}$ et $\underline{\underline{\sigma}} = 2\,\mu_n\,\underline{\underline{D}}$. Comme $U'(z) = \frac{1}{l}(V_c - 3\,V_p\,z/l)$ et $[U'(z)]^2 = \frac{1}{l^2}(9\,V_p^2\,z^2/l^2 - 6\,V_p\,V_c\,z/l + V_c^2)$, on retrouve $P = -P_{int} = \mu_n\int_{-l}^{l}[U'(z)]^2\,dz = \frac{2\,\mu_n}{l}\,(3\,V_p^2 + V_c^2)$. **22)**En reportant $V_c = V - V_p$ dans l'expression de $G(V_c) = P/C_5 = 3\,V_p^2 + V_c^2 = 3\,(V - V_c)^2 + V_c^2$, on cherche à minimiser la fonction $G(V_c)$ en annulant sa dérivée $G'(V_c) = 6\,(V - V_c) + 2\,V_c = 2\,(3\,V - 4\,V_c)$. L'équation $G'(V_c) = 0$ conduit à $V_c = \frac{3}{4}\,V$ et donc $V_p = \frac{1}{4}\,V$. On a donc $V_p/V_c = 1/3$. **23)**Pour $V_p = V/4$ et $V_c = 3\,V/4$, les puissances sont alors $P_F = 0$ et $P = P_f = \frac{3}{2}\,\mu_n\,V^2/l$. **24)**Si $V_c = 0$, la puissance pour générer un écoulement de Poiseuille $U(z) = \frac{3}{2}\,V\,\phi_p\left(\frac{z}{l}\right)$ est $P_p = 6\,\mu_n\,V^2/l$. Si $V_p = 0$, la puissance pour générer un écoulement de Couette $U(z) = 2\,V\,\phi_c\left(\frac{z}{l}\right)$ est $P_c = 2\,\mu_n\,V^2/l$. On a donc $P_{opt}/P_c = 3/4 = 0,75$ et $P_{opt}/P_p = 1/4 = 0,25$. **25)**Pour $V_p = V/4$ et $V_c = 3\,V/4$, on a $U(z) = \frac{3}{8}\,V\,(3 + 2\,\zeta - \zeta^2)$ avec $\zeta = z/l$. On vérifie que $U'(l) = 0$, ce qui est cohérent avec $F = 0$ et $P_F = 0$. Le profil $U(z)$ est une parabole (figure 2) avec $U(-l) = 0$, $U'(l) = 0$ et $U(l) = \frac{3}{2}\,V$ où $V = \frac{1}{2\,l}\int_{-l}^{l} U(z)\,dz$ est la vitesse débitante. En pratique, le choix d'une force $F = 0$ sur la plaque en $z = l$ rétablirait une condition d'adhérence à la paroi, et donc un écoulement de Poiseuille $U(z) = \frac{3}{2}\,V\,\phi_p(\zeta)$ avec $P = 4\,P_{opt}$, donc quatre fois la puissance optimale. Une force électrique F positive très faible mais non nulle permet donc d'atteindre l'optimum énergétique, en réduisant la dépense d'énergie d'un facteur quatre.

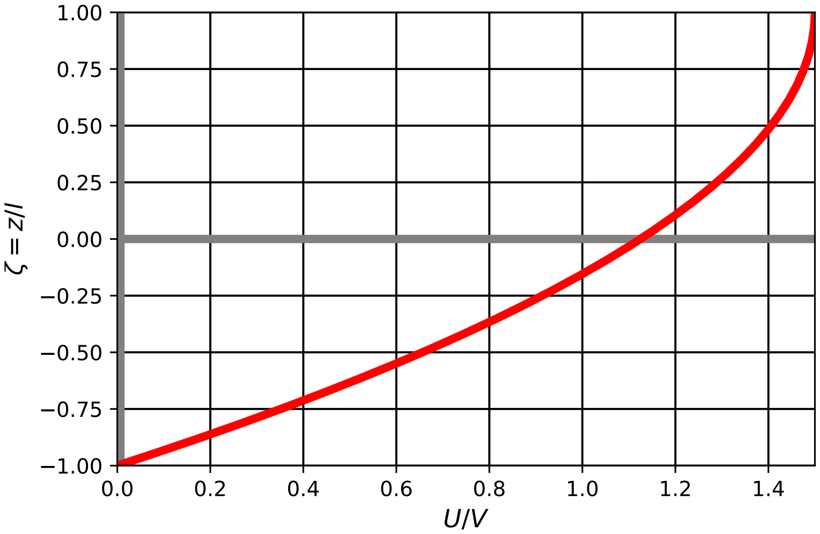

FIGURE 2 – *Profil de vitesse $U(z)$ pour l'optimum énergétique. Comme $U'(l) = 0$, on a $F = 0$.*