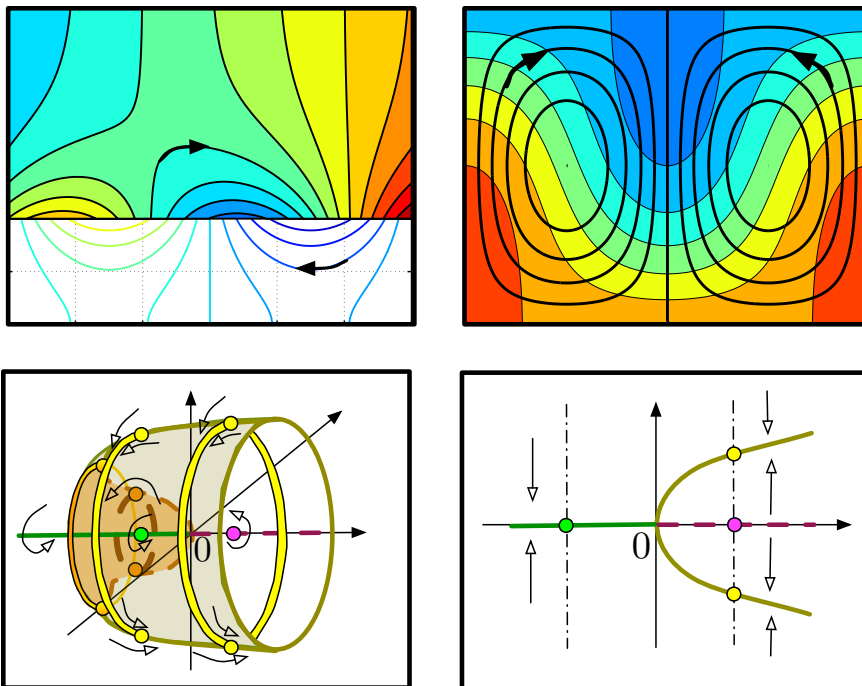


Instabilités hydrodynamiques



Toulouse INP - ENSEEIHT

Département "Mécanique des Fluides, Énergétique et Environnement"

Année 2022-2023, version du 15 novembre 2022

Avant-propos

La modélisation consiste à représenter la réalité physique par un système d'équations mathématiques. Il peut s'agir de relations algébriques, d'équations différentielles ordinaires ou encore d'équations aux dérivées partielles. Les valeurs des variables de ces équations représentent alors l'état du système. Le modèle ainsi construit dépend de paramètres fixes, appelés paramètres de contrôle. C'est, par exemple, l'intensité du forçage, l'importance du frottement, la capacité à conduire la chaleur, etc. La compréhension d'un système physique consiste souvent à étudier son comportement pour une large gamme de ces paramètres de contrôle.

Très souvent, le système d'équations constituant le modèle représente une évolution temporelle. En fonction du choix des conditions initiales ou des paramètres de contrôle, le système peut converger vers un équilibre ou parcourir indéfiniment des états successifs. Les suites d'états successifs évoluant dans le temps constituent ce que l'on appelle une trajectoire. On peut aussi calculer l'existence d'équilibres impossibles à observer physiquement dans la mesure où une petite perturbation d'un tel équilibre conduit à une trajectoire qui s'en écarte. On dit alors que l'équilibre est instable. La stabilité d'un équilibre et l'organisation des trajectoires dépend des paramètres de contrôle.

L'objectif de ce cours est d'explorer les outils mathématiques simples qui permettent de déterminer si un équilibre est stable ou instable. La technique consiste à considérer l'évolution de petites perturbations de l'équilibre. On peut tirer parti de cette hypothèse de petit paramètre pour négliger les termes d'ordre deux dans les équations, l'ordre un étant l'amplitude des petites perturbations. On obtient alors un système d'équations linéaires, plus facile à résoudre que le système initial. La croissance ou la décroissance de ces petites perturbations permet de déterminer si l'équilibre considéré est stable ou instable.

Les modèles étudiés dans ce cours sont issus de la mécanique des fluides, sauf dans le troisième chapitre où l'exemple du pendule simple est utilisé pour introduire quelques notions de base. L'étude des instabilités des écoulements est très importante pour la compréhension physique de la mécanique des fluides. Le présent cours n'est qu'une première approche des nombreuses instabilités hydrodynamiques intervenant dans les écoulements industriels et géophysiques. Il aborde l'exemple de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz, qui illustre les instabilités induites par les cisaillements de vitesse, ainsi que l'exemple de la convection de Rayleigh-Bénard, qui illustre les instabilités par forçage thermique.

Le cours et le polycopié sont structurés en trois chapitres.

Le premier chapitre étudie la stabilité d'un écoulement constitué de deux couches fluides de masse volumique ou de vitesses différentes. L'instabilité de Kelvin-Helmoltz apparaît lorsque la vitesse du fluide léger, surmontant le fluide lourd, est suffisamment forte. Les petites oscillations d'une surface libre, formant les ondes de surface, sont étudiées dans le cadre de ce formalisme.

Le deuxième chapitre aborde l'exemple de la convection de Rayleigh-Bénard observée lorsque l'on soumet une couche fluide comprise en deux plaques planes à une différence de température. Lorsque le gradient de température est suffisamment fort, le régime conductif est remplacé par des rouleaux de convection.

Dans le troisième chapitre, les notions de base sur la linéarisation des systèmes d'équations autour d'un équilibre sont présentés sur des exemples simples comme le pendule simple avec ou sans frottement, l'oscillateur de Van de Pol et des systèmes d'équations aux dérivées partielles unidimensionnelles. La différence entre systèmes dissipatifs et systèmes conservatifs est explicitée en insistant sur l'existence ou non d'attracteurs.

Le dernier chapitre regroupe des exercices et problèmes d'application des notions et concepts introduits dans les trois premiers chapitres. Les corrections sont en ligne lorsqu'elles ne figurent pas sur la version papier du polycopié.

Une trentaine de vidéos de deux minutes (neuf par chapitre) sont en ligne sous la référence suivante :

O. Thual, *Éd. Ress. Pédago. Ouv. INP 1017* (2020) 12h
<https://www.olivier-thual.fr/201017>

Des sources d'approfondissement sur les instabilités peuvent être trouvées dans la bibliographie figurant à la fin de ce polycopié. On pourra aussi consulter les travaux effectués par les élèves du Département "Hydraulique - Mécanique des fluides" de l'ENSEEIH sur le site :

www.enseeiht.fr/travaux

et plus particulièrement aux adresses suivantes :

www.enseeiht.fr/travaux/CD0001/travaux/optmfn/hi/01pa/hyb72/index.htm

www.enseeiht.fr/travaux/THEMES/travaux/optmfn/hi/hi.htm

www.enseeiht.fr/travaux/CD0304/optmfn/hi/hi.htm

Table des matières

1	Instabilité de Kelvin-Helmoltz	5
1	Écoulement cisailé bicouche	6
2	Dynamique linéaire d'un écoulement cisailé	8
3	Ondes et instabilités	11
2	Instabilité de Rayleigh-Bénard	19
1	Modèle de convection thermique	20
2	Calcul de stabilité	23
3	Calcul du seuil de convection	26
3	Linéarisation autour de l'équilibre	37
1	Systèmes dynamiques simples	38
2	Systèmes conservatifs ou dissipatifs	44
3	Équations aux dérivées partielles	48
4	Exercices complémentaires	57
1	Exercice sur le chapitre 1	58
2	Exercice sur le chapitre 2	66
3	Exercice sur le chapitre 3	71
	Bibliographie	77

Chapitre 1

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Sommaire

1	Écoulement cisailé bicouche	6
1.1	Équations d'Euler	7
1.2	Conditions aux limites	7
1.3	Écoulement potentiel	8
2	Dynamique linéaire d'un écoulement cisailé	8
2.1	Linéarisation	9
2.2	Solutions complexes	9
2.3	Relation de dispersion généralisée	10
3	Ondes et instabilités	11
3.1	Instabilité de Kelvin-Helmoltz	11
3.2	Instabilité de Rayleigh Taylor	12
3.3	Dispersion de la houle	12

Introduction

Lorsque le vent souffle suffisamment fort sur la surface de l’océan, on observe la croissance vagues. Cette instabilité, due au cisaillement du champ de vitesse, est appelée “instabilité de Kelvin-Helmoltz”.



FIGURE 1.1 – Vagues générées par le vent lors d’une tempête.

Lorsqu’un fluide lourd est placé au-dessus d’un fluide léger, on observe la croissance de doigts amorçant le mélange des deux fluides. Cette instabilité, due à la gravité, est appelée “instabilité de Rayleigh-Taylor”.

En l’absence de forçage de la vitesse et lorsque le fluide lourd est placé sous le fluide léger, une perturbation de l’interface génère des oscillations que l’on appelle “ondes de surface” ou “ondes de gravité externes” ou plus communément “houle linéaire” ou “vagues”.

Pour comprendre ces phénomènes d’instabilité ou d’oscillations, pour déterminer leurs taux de croissance et leurs pulsations, le choix d’un modèle pertinent, sa linéarisation autour d’un état d’équilibre et le calcul d’une relation de dispersion généralisée constituent une démarche très courante en physique, bien au-delà de la mécanique des fluides. Cette relation de dispersion généralisée relie le taux de croissance de l’instabilité ou la période de l’oscillation à la longueur d’onde des perturbations et aux différents paramètres du problème étudié.

Ce chapitre explicite le calcul et l’interprétation de cette relation de dispersion généralisée pour l’écoulement cisailé de deux fluides parfaits de masse volumiques différentes.

1 Écoulement cisailé bicouche

On considère deux couches fluides superposées de masses volumiques différentes. On suppose que la couche supérieure, d’extension infinie, est animée d’une vitesse moyenne constante. Il peut se développer des instabilités ou simplement des oscillations de la surface libre autour d’un état d’équilibre. Le cas général où les deux couches peuvent être d’extension quelconques et où la

couche fluide inférieure est animée d'un courant moyen se déduit facilement par généralisation du cas particulier traité ici.

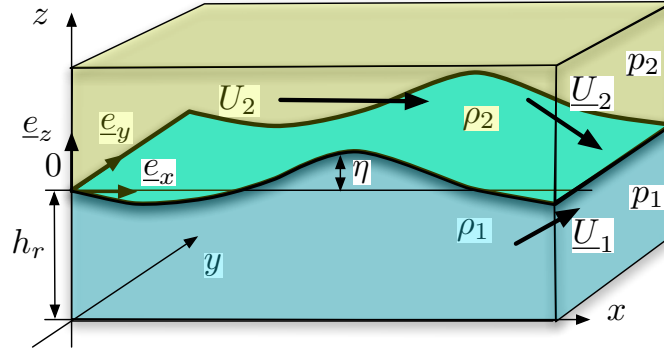


FIGURE 1.2 – Deux couches fluides superposées avec un fond en $z = -h_r$.

1.1 Équations d'Euler

Nous supposons ici que les fluides sont parfaits et incompressibles et nous notons ρ_1 et ρ_2 les masses volumiques des fluides respectivement situés en bas et en haut. La dynamique est modélisée par les équations d'Euler incompressibles

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U}_2 = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_2}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_2 = -\frac{1}{\rho_2} \operatorname{grad} p_2 - g \underline{e}_z, \\ \operatorname{div} \underline{U}_1 = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_1 = -\frac{1}{\rho_1} \operatorname{grad} p_1 - g \underline{e}_z, \end{aligned} \quad (1.1)$$

où $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$ est le vecteur des coordonnées, $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ un repère orthonormé, $\underline{U}_1(\underline{x}, t) = u_1 \underline{e}_x + v_1 \underline{e}_y + w_1 \underline{e}_z$ et $\underline{U}_2(\underline{x}, t) = u_2 \underline{e}_x + v_2 \underline{e}_y + w_2 \underline{e}_z$ sont les champs de vitesses respectifs des deux couches et $p_1(\underline{x}, t)$ et $p_2(\underline{x}, t)$ leurs champs de pression. Le vecteur unitaire \underline{e}_z est vertical et g est l'intensité de la gravité.

1.2 Conditions aux limites

On suppose que la géométrie du problème induit les conditions aux limites

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \underline{U}_2 \cdot \underline{e}_z = 0 \quad \text{et} \quad \underline{U}_1 \cdot \underline{e}_z = 0 \quad \text{pour } z = -h_r \quad (1.2)$$

où \underline{e}_x est un vecteur unitaire horizontal et \underline{e}_z le vecteur unitaire vertical. On suppose que l'équation de la surface libre est donnée par l'équation

$$F(\underline{x}, t) = z - \eta(x, y, t) = 0, \quad (1.3)$$

ce qui exclut les déformations de type déferlement. Les deux conditions aux limites cinématiques s'écrivent

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} F = 0 \quad \text{sur } F(\underline{x}, t) = 0 \quad (1.4)$$

Elles expriment que la dérivée particulaire de F est nulle pour les deux mouvements, ce qui est équivalent à dire que la vitesse normale du fluide est égale à la vitesse normale de la surface. La condition dynamique

$$p_1 = p_2 \quad \text{sur } F(\underline{x}, t) = 0 \quad (1.5)$$

s'obtient en assurant la continuité des efforts de contact et en négligeant donc l'effet de tension superficielle. Les conditions à l'interface $z = \eta(x, y, t)$ des deux fluides s'écrivent alors

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \underline{\text{grad}} \eta = w_2, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \underline{\text{grad}} \eta = w_1, \quad p_1 = p_2. \quad (1.6)$$

1.3 Écoulement potentiel

On suppose que l'écoulement est irrotationnel dans chacune des couches fluides ($\text{rot } \underline{U}_2 = \text{rot } \underline{U}_1 = \underline{0}$), ce qui permet d'écrire les champs de vitesse sous la forme

$$\underline{U}_2 = \underline{\text{grad}} (U_2 x + \phi_2) = U_2 \underline{e}_x + \underline{\text{grad}} \phi_2 \quad \text{et} \quad \underline{U}_1 = \underline{\text{grad}} \phi_1, \quad (1.7)$$

où $U_2 \underline{e}_x$ est une vitesse constante que l'on souhaite considérer comme état de base pour la couche supérieure. Le système d'équations s'écrit alors

$$\begin{aligned} \Delta \phi_2 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\text{grad}} \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_2)^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + g z \right] &= \underline{0}, \\ \Delta \phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\text{grad}} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_1)^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + g z \right] &= \underline{0}. \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow +\infty} \underline{\text{grad}} \phi_2 &= \underline{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_r, \\ \left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta + \underline{\text{grad}} \phi_2 \cdot \underline{\text{grad}} \eta &= \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \\ p_1 = p_2 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{\text{grad}} \phi_1 \cdot \underline{\text{grad}} \eta &= \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \text{en } z = \eta. \end{aligned}$$

Comme ϕ_2 et ϕ_1 sont respectivement définis à une "constante" (en espace) $C_2(t)$ et $C_1(t)$ près, on peut choisir une pression de référence p_r arbitraire permettant d'éliminer la pression en écrivant

$$\begin{aligned} p_2 &= p_r - \rho_2 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_2)^2 + g z \right], \\ p_1 &= p_r - \rho_1 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_1)^2 + g z \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

2 Dynamique linéaire d'un écoulement cisailé

On linéarise l'écoulement de base pour lequel la couche inférieure est au repos tandis que la couche supérieure est animée d'une vitesse constante. On calcule alors les solutions complexes ainsi que la relation de dispersion généralisée.

2.1 Linéarisation

On s'intéresse à l'état de base $\underline{U}_2 = U_2 \underline{e}_x$, $\eta = 0$ et $\underline{U}_1 = \underline{0}$. La pression est alors $p_0(z) = p_r - \rho_2 g z$ pour $z \geq 0$ où p_r et $p_0(z) = p_r - \rho_1 g z$ pour $z \leq 0$ est une pression de référence arbitraire.

On linéarise autour de cet état de base en posant $p_2 = p_0(z) + \tilde{p}_2$ pour $z \geq 0$, $p_1 = p_0(z) + \tilde{p}_1$ pour $z \leq 0$, et en supposant que \tilde{p}_2 , \tilde{p}_1 , η , ϕ_2 et ϕ_1 sont des petites perturbations. La linéarisation conduit à négliger les termes non linéaires dans les équations mais aussi à remplacer les conditions aux limites sur la surface mobile d'équation $z = \eta(x, y, t)$ par des conditions aux limites sur la surface fixe d'équation $z = 0$. En effet, pour un champ quelconque $f(x, y, z, t)$ on peut écrire

$$f[x, y, \eta(x, y, t), t] = f(x, y, 0, t) [1 + O(\eta)] . \quad (1.9)$$

Le modèle linéaire est alors constitué des équations de Laplace $\Delta \phi_2 = \Delta \phi_1 = 0$ dans les fluides avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow +\infty} \text{grad } \phi_2 = \underline{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \text{ en } z = -h_r , \\ \text{en } z = 0 : & \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta = \frac{\partial \phi_2}{\partial z} , \quad p_1 = p_2 , \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} . \end{aligned}$$

En remplaçant la pression par sa valeur et en linéarisant, la condition $p_1 = p_2$ s'écrit

$$\rho_2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_2 + g \eta \right] = \rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g \eta \right) \quad \text{en } z = 0 . \quad (1.10)$$

2.2 Solutions complexes

Dans la mesure où le problème est invariant par translations en temps et en espace dans les directions horizontales, on cherche des solutions complexes sous la forme

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \Phi_2(z) e^{ik_x x + ik_y y + s t} , \\ \eta &= \eta_m e^{ik_x x + ik_y y + s t} , \\ \phi_1 &= \Phi_1(z) e^{ik_x x + ik_y y + s t} , \end{aligned} \quad (1.11)$$

avec $s = \sigma - i\omega$. On note $\underline{k} = (k_x, k_y)$ le vecteur d'onde horizontal. Comme les équations sont linéaires à coefficients réels, les parties réelles de ces solutions sont aussi solutions.

L'écoulement de base est instable s'il existe des solutions dont le taux de croissance temporel σ est positif. Dans le cas où $\sigma = 0$, on obtient des ondes de pulsation ω .

On note ici $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Le problème à résoudre est donc

$$\begin{aligned} \Phi_2'' - k^2 \Phi_2 &= 0 \quad \text{et} \quad \Phi_1'' - k^2 \Phi_1 = 0 \quad \text{avec} \\ (s + i k_x U_2) \eta_m &= \Phi_2'(0) \quad \text{et} \quad s \eta_m = \Phi_1'(0) , \\ \rho_2 [(s + i k_x U_2) \Phi_2(0) + g \eta_m] &= \rho_1 [s \Phi_1(0) + g \eta_m] , \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_2'(z) &= 0 \quad \text{et} \quad \Phi_1'(-h_r) = 0 . \end{aligned} \quad (1.12)$$

2.3 Relation de dispersion généralisée

On en déduit $\Phi_2(z) = \Phi_{2m} e^{-kz}$ et $\Phi_1(z) = \Phi_{1m} \cosh[k(z+h_r)]$, les amplitudes complexes Φ_{2m} et Φ_{1m} vérifiant le système d'équations

$$\begin{aligned} (s + i k_x U_2) \eta_m &= -\Phi_{2m} k & \text{et} & & s \eta_m &= \Phi_{1m} k \sinh(k h_r), \\ \rho_2 [(s + i k_x U_2) \Phi_{2m} + g \eta_m] &= \rho_1 [s \Phi_{1m} \cosh(k h_r) + g \eta_m]. \end{aligned}$$

L'allure des isocontours des fonctions propres ainsi obtenues est représentée sur la figure 1.3.

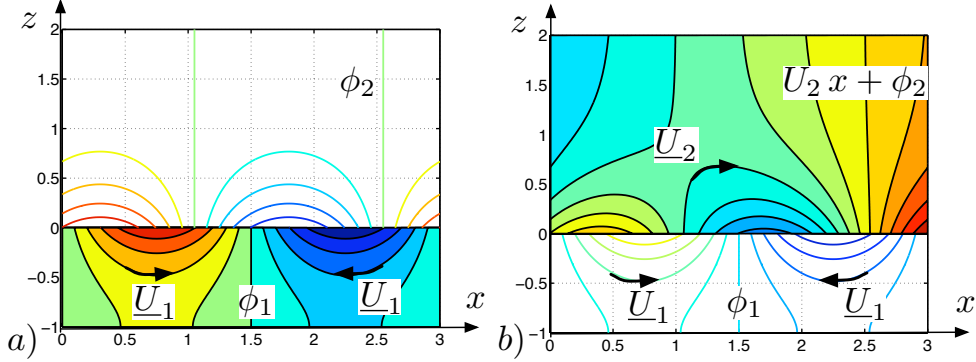


FIGURE 1.3 – a) Isocontours des fonctions de courant ϕ_2 et ϕ_1 pour un mode propre. b) Isocontours de $\phi_2 + U_2 x$ et de ϕ_1 .

En reportant les valeurs de Φ_{1m} et Φ_{2m} en fonction de η_m et en simplifiant par η_m , on obtient la relation de dispersion généralisée

$$\rho_2 [gk - (s + i k_x U_2)^2] = \rho_1 \left[gk + \frac{s^2}{\tanh(k h_r)} \right]. \quad (1.13)$$

On remarque tout d'abord que si s est une valeur propre correspondant à un mode de nombre d'onde horizontal k_x , alors $-s$ est une valeur propre associée à un mode de nombre d'onde horizontal $-k_x$. Cette symétrie provient du fait que le système étudié est conservatif.

On peut adimensionner cette équation en utilisant $[L] = h_r$ comme unité de longueur et $[T] = h_r/U_2$ comme unité de temps et noter $\hat{k} = k h_r$, $\hat{k}_x = k_x h_r$ et $\hat{s} = s h_r/U_2$. L'équation (1.13) devient alors

$$\xi \left[\hat{k} - F^2 (\hat{s} + i \hat{k}_x)^2 \right] = \hat{k} + \frac{F^2 \hat{s}^2}{\tanh \hat{k}}. \quad (1.14)$$

en faisant apparaître les deux nombres sans dimension

$$\xi = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{et} \quad F = \frac{U_2}{\sqrt{g h_r}}. \quad (1.15)$$

Ce dernier nombre s'apparentant à un "nombre de Froude". Le calcul de stabilité consiste donc à calculer, pour tout ξ , F , \hat{k}_x et \hat{k}_y , les deux racines de polynôme du second degré en \hat{s} de l'équation (1.14). Ce calcul est fastidieux et nous nous contenterons d'examiner quelques cas particuliers.

3 Ondes et instabilités

On étudie la relation de dispersion généralisée (1.13) pour plusieurs cas particuliers. Dans le cas où la couche inférieure est infinie, on sait calculer une condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre soit instable. Dans le cas où la vitesse U_2 est nulle, on obtient l'instabilité de Rayleigh-Taylor lorsque la couche supérieure est plus lourde que la couche inférieure, et des ondes de gravité dans le cas contraire. Enfin, lorsque la masse volumique de la couche supérieure est négligeable, on obtient la relation de dispersion des ondes de surface.

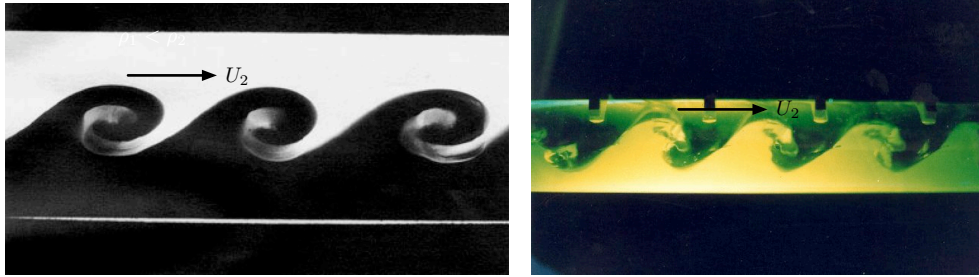


FIGURE 1.4 – Instabilité de Kelvin-Helmholtz.

3.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

On considère tout d'abord le cas où la profondeur est infinie, c'est-à-dire la limite $kh_r \rightarrow \infty$. L'équation de dispersion s'écrit alors

$$\rho_2 [gk - (s + ik_x U_2)^2] = \rho_1 (gk + s^2) . \quad (1.16)$$

On montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre soit instable est

$$g \sqrt{k_x^2 + k_y^2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) < k_x^2 \rho_1 \rho_2 U_2^2 . \quad (1.17)$$

En effet, cette condition indique que le discriminant de l'équation du second degré (1.16) est positif et l'on montre que les racines sont imaginaires pures s'il est négatif.

Si $\rho_1 = \rho_2$, cette condition est toujours satisfaite et l'écoulement cisailé est instable.

Si ρ_1 est plus grand que ρ_2 (couche lourde en bas), on voit donc que l'écoulement n'est instable que si U_2 est suffisamment fort ou k_x suffisamment grand. On est en présence de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. On voit que les modes de petites longueurs d'ondes en x (grands k_x) sont les plus instables. Une modélisation plus physique consiste alors à prendre en compte la viscosité où la tension de surface qui ont pour effet d'amortir les oscillations en dissipant l'énergie aux petites échelles au profit d'échelles instables de taille finie (figure 1.4a).

3.2 Instabilité de Rayleigh Taylor

Dans le cas particulier où la profondeur h_r est infinie et où $U_2 = 0$, la relation de dispersion généralisée s'écrit

$$\rho_1 (gk + s^2) = \rho_2 (gk - s^2) \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} gk. \quad (1.18)$$

Si ρ_2 est plus grand que ρ_1 , c'est-à-dire si le fluide du haut est le plus lourd, il existe toujours une famille de modes instables dont le taux de croissance augmente avec k . On est en présence de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Il faut alors enrichir le modèle avec des termes de dissipation qui vont stabiliser les très petites échelles et sélectionner l'échelle des ondes instables (figure 1.5a).

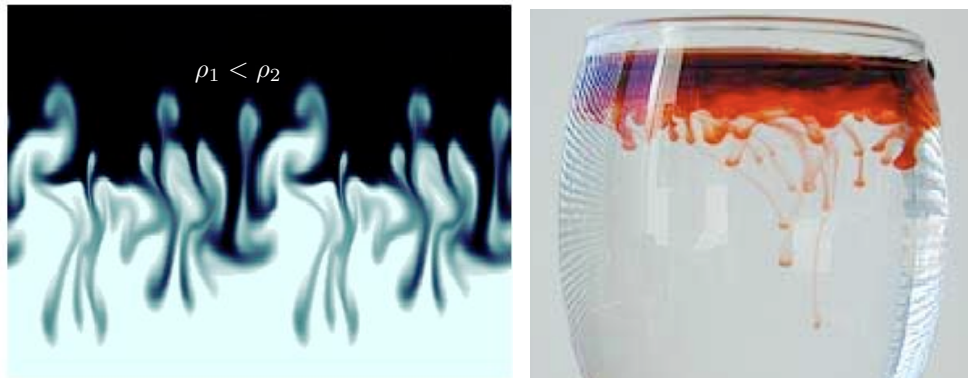


FIGURE 1.5 – Instabilité de Rayleigh-Taylor avec $U_2 = 0$.

Si ρ_1 est plus grand que ρ_2 , les deux racines s_1 et s_2 sont imaginaires pures et le système est marginal (oscillations). Les ondes qui se développent à l'interface des deux fluides sont des ondes de gravité.

3.3 Dispersion de la houle

On considère désormais le cas des profondeurs quelconques et on suppose que $\rho_1 \gg \rho_2$. C'est le cas de la houle forcée par le vent et l'on voit, à partir de la relation (1.17), que l'instabilité est obtenue pour des vitesses U_2 très grandes ou bien en observant le phénomène sur des temps très longs. C'est pourquoi le développement d'une mer agitée ne s'observe qu'au bout d'une grande distance, appelée "fetch", sur laquelle le vent doit souffler de manière significative.

Lorsque le vent est retombé ou lorsque les vagues s'éloignent de la tempête, on peut négliger le terme en ρ_2 dans la relation de dispersion qui s'écrit alors

$$s^2 + gk \tanh(kh_r) = 0. \quad (1.19)$$

On voit donc que $s = -i\omega$ où ω est donné par la relation de dispersion des ondes de surface (figure 1.6) qui s'écrit

$$\omega = \Omega(k) \quad \text{ou} \quad \omega = -\Omega(k) \quad \text{avec} \quad \Omega(k) = \sqrt{gk \tanh(kh_r)}. \quad (1.20)$$

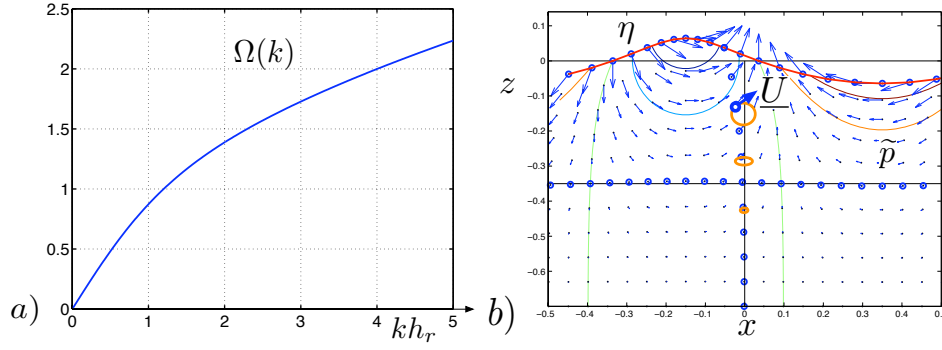


FIGURE 1.6 – a) Relation de dispersion $\Omega(k)$ et vitesse de phase $c_\varphi(k)$ pour les ondes de surface. b) Onde monochromatique et mouvement des particules.

Lorsque cette relation est vérifiée, on obtient des solutions complexes non triviales du problème linéaire sous la forme

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \eta_m e^{ik_x x - i\omega t}, \\ \phi(x, z, t) &= \frac{\Phi_m \cosh[k(z + h_r)]}{g \eta_m} e^{ik_x x - i\omega t}, \\ \text{avec } \Phi_m &= \frac{i \omega \cosh(k h_r)}{g \eta_m}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

la relation entre Φ_m et η_m découlant, par exemple, de la condition $\frac{\partial \phi}{\partial t} + g \eta = 0$ en $z = 0$. L'expression générale réelle d'une onde rectiligne progressive est donc, en choisissant η_m réel,

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \eta_m \cos(k_x x - \omega t), \\ \phi(x, z, t) &= \frac{g \eta_m}{\omega} \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \sin(k_x x - \omega t). \end{aligned} \quad (1.22)$$

On en déduit le champ de vitesse réel dont les composantes sont

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= \frac{g \eta_m}{\omega} k_x \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \cos(k_x x - \omega t), \\ w(x, z, t) &= \frac{g \eta_m}{\omega} k \frac{\sinh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \sin(k_x x - \omega t). \end{aligned} \quad (1.23)$$

La relation $\tilde{p} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ permet de calculer l'expression de la fluctuation de pression, aussi appelée "pression dynamique", qui s'écrit

$$\tilde{p}(x, z, t) = \rho g \eta_m \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \cos(k_x x - \omega t). \quad (1.24)$$

Comme l'amplitude de l'onde est petite, on peut remplacer les positions $x(t)$ et $z(t)$ par leurs moyennes x_0 et z_0 dans l'expression du champ de vitesse qui intervient dans l'équation $\dot{x}(t) = \underline{U}[x(t), t]$. Cette hypothèse d'onde infinitésimale, compatible avec la démarche de linéarisation suivie pour l'étude des ondes, se traduit par la condition $\eta_m \ll \frac{\omega^2}{g k^2}$ (il suffit d'adimensionner l'amplitude η_m avec g , k et ω). L'équation des trajectoires paramétrées par les positions (x_0, z_0) , est alors

$$x(x_0, z_0; t) = x_0 - \frac{g \eta_m}{\omega^2} k_x \frac{\cosh[k(z_0 + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \sin(k_x x_0 - \omega t),$$

$$z(x_0, z_0; t) = z_0 + \frac{g \eta_m}{\omega^2} k \frac{\sinh[k(z_0 + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \cos(k_x x_0 - \omega t), \quad (1.25)$$

avec $k = |k_x|$. Ces trajectoires décrivent des ellipses de centres (x_0, z_0) comme le montre la figure 1.6b.

FORMULAIRE

Équation d'Euler

Les équations d'Euler avec conditions aux limites considérées s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U}_2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_2}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_2 &= -\frac{1}{\rho_2} \operatorname{grad} p_2 - g \underline{e}_z, \\ \operatorname{div} \underline{U}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_1 &= -\frac{1}{\rho_1} \operatorname{grad} p_1 - g \underline{e}_z, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \underline{U}_2 \cdot \underline{e}_z = 0 \quad \text{et} \quad \underline{U}_1 \cdot \underline{e}_z = 0 &\text{ pour } z = -h_r, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} \eta = w_2, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} \eta = w_1 &\text{ et } p_1 = p_2. \end{aligned}$$

Linéarisation autour d'un équilibre cisailé

En supposant que $\underline{U}_2 = U_2 \underline{e}_x + \operatorname{grad} \phi_2$ et $\underline{U}_1 = \operatorname{grad} \phi_1$ avec ϕ_1 et ϕ_2 petits, le système linéarisé s'écrit :

$$\begin{aligned} p_2 = p_r - \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g z \right) \quad \text{et} \quad p_1 = p_r - \rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g z \right), \\ \Delta \phi_2 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \phi_1 = 0, \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} \operatorname{grad} \phi_2 = \underline{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \text{ en } z = -h_r, \\ \text{en } z = 0 : \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \\ \text{et } \rho_2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_2 + g \eta \right] = \rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g \eta \right). \end{aligned}$$

Solutions complexes

Le problème étant invariant par translations en temps et en espace dans les directions horizontales, on cherche des solutions complexes sous la forme :

$$(\phi_2, \eta, \phi_1) = [\Phi_2(z), \eta_m, \Phi_1(z)] e^{ik_x x + ik_y y + st} \quad \text{avec } s = \sigma - i\omega.$$

L'écoulement de base est instable s'il existe des solutions dont le taux de croissance temporel σ est positif. Dans le cas où $\sigma = 0$, on obtient des ondes de

pulsation ω . En notant $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Le problème à résoudre est :

$$\begin{aligned} \Phi_2'' - k^2 \Phi_2 &= 0 & \text{et} & & \Phi_1'' - k^2 \Phi_1 &= 0 & \text{avec} \\ (s + i k_x U_2) \eta_m &= \Phi_2'(0) & \text{et} & & s \eta_m &= \Phi_1'(0) , \\ \rho_2 [(s + i k_x U_2) \Phi_2(0) + g \eta_m] &= & \rho_1 [s \Phi_1(0) + g \eta_m] , \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_2'(z) &= 0 & \text{et} & & \Phi_1'(-h_r) &= 0 . \end{aligned}$$

Relation de dispersion généralisée

Comme $\Phi_2(z) = \Phi_{2m} e^{-kz}$ et $\Phi_1(z) = \Phi_{1m} \cosh[k(z + h_r)]$, les amplitudes complexes Φ_{2m} et Φ_{1m} vérifient le système d'équations :

$$\begin{aligned} (s + i k_x U_2) \eta_m &= -\Phi_{2m} k & \text{et} & & s \eta_m &= \Phi_{1m} k \sinh(k h_r) , \\ \rho_2 [(s + i k_x U_2) \Phi_{2m} + g \eta_m] &= & \rho_1 [s \Phi_{1m} \cosh(k h_r) + g \eta_m] \\ \implies \rho_2 [g k - (s + i k_x U_2)^2] &= & \rho_1 \left[g k + \frac{s^2}{\tanh(k h_r)} \right] . \end{aligned}$$

Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Dans le cas $kh_r \rightarrow \infty$ de la profondeur infinie, l'équation de dispersion s'écrit :

$$\begin{aligned} \implies \text{Instabilité ssi} & \quad \rho_2 [g k - (s + i k_x U_2)^2] = \rho_1 (g k + s^2) \\ & \quad g \sqrt{k_x^2 + k_y^2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) < k_x^2 \rho_1 \rho_2 U_2^2 . \end{aligned}$$

EXERCICES

EXERCICE 1.1 Instabilité de Saffman-Taylor

On se place dans le repère mobile, de vitesse constante $U_0 \underline{e}_y$, lié à l'interface entre deux fluides visqueux, non miscibles, incompressibles et régis par les lois de Darcy 2D

$$\begin{aligned} \underline{U}_1(x, y, t) &= -C_1 \underline{\text{grad}} p_1(x, y, t) , \\ \underline{U}_2(x, y, t) &= -C_2 \underline{\text{grad}} p_2(x, y, t) , \end{aligned} \quad (1.26)$$

où, pour $i \in \{1, 2\}$, les \underline{U}_i sont les vitesses absolues (et non pas relatives au repère mobile), les p_i sont les champs de pressions et les C_i sont des coefficients constants (figure 1.7), pour $i \in \{1, 2\}$. Dans le cas d'une cellule de Hele-Shaw, pour laquelle les deux fluides visqueux s'écoulent entre deux plaques planes

horizontales très rapprochées, on a $C_i = \frac{b^2}{12\mu_i}$ où b est la distance entre les deux plaques et les μ_i sont les viscosités dynamiques respectives des fluides.

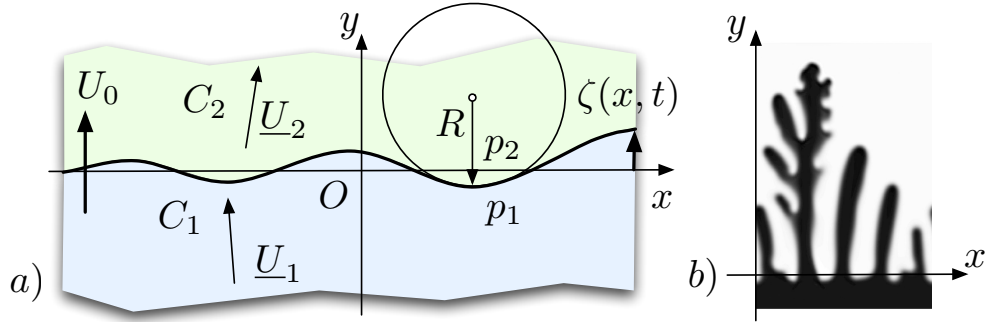


FIGURE 1.7 – a) Vitesses absolues dans le repère mobile U_0 de l'interface de deux fluides visqueux non-miscibles régis par une loi de Darcy. b) Doigts de Saffman-Taylor.

Si R est le rayon de courbure de l'interface $y = \zeta(x, t)$ délimitant les deux fluides non miscibles (figure 1.7), la tension superficielle induit une différence des pression $p_2 = p|_{y=\zeta^+}$ et $p_1 = p|_{y=\zeta^-}$ sous la forme $p_2 - p_1 = T/R - A$ où T et A sont des constantes positives. Dans le cas d'une cellule de Hele-Shaw, on peut poser $A = 2T/b$ en approximant par $b/2$ le rayon de courbure du profil parabolique de la vitesse dans la direction z de l'écoulement laminaire. Cette direction z n'intervient qu'à travers la constante la constante A dans la modélisation 2D ci-dessous. Lorsque ζ est petit, cette condition s'écrit

$$p_2 - p_1 = T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - A \quad \text{en } y = \zeta(x, t). \quad (1.27)$$

On considère l'état de base défini par

$$\begin{aligned} p_1 = p_{10}(y) = p_r - \frac{U_0}{C_1} y, & \quad p_2 = p_{20}(y) = p_r - A - \frac{U_0}{C_2} y, \\ \underline{U}_1 = \underline{U}_2 = U_0 \underline{e}_y & \quad \text{et} \quad \zeta = 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

où p_r est une pression de référence. On s'intéresse aux perturbations $\zeta(x, t)$ de l'interface mobile avec

$$\begin{aligned} \underline{U}_1(x, y, t) = U_0 \underline{e}_y + \tilde{u}_1 \underline{e}_x + \tilde{v}_1 \underline{e}_y, & \quad p_1(x, y, t) = p_{10}(y) + \tilde{p}_1, \\ \underline{U}_2(x, y, t) = U_0 \underline{e}_y + \tilde{u}_2 \underline{e}_x + \tilde{v}_2 \underline{e}_y, & \quad p_2(x, y, t) = p_{20}(y) + \tilde{p}_2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

1) Montrer que l'on a $\Delta \tilde{p}_1 = 0$ et $\Delta \tilde{p}_2 = 0$.

Comme les fluides sont supposés incompressibles, on a $\text{div } \underline{U}_i = 0$ ce qui entraîne $\Delta p_i = 0$.

2) Commenter les conditions aux limites $\tilde{p}_1 = 0$ en $y = -\infty$ et $\tilde{p}_2 = 0$ en $y = \infty$.

La nullité des perturbations de pression à l'infini entraîne que la vitesse est celle de l'état de base.

3) En se plaçant dans le repère mobile de vitesse $U_0 \underline{e}_y$ et en considérant les vitesses relatives $\tilde{\underline{U}}_i = \tilde{u}_i \underline{e}_x + \tilde{v}_i \underline{e}_y$, justifier les conditions aux limites $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \tilde{u}_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \tilde{v}_1$ et $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \tilde{v}_2$ en $y = \zeta(x, t)$.

Les conditions aux limites cinématiques de surface énoncent que la vitesse normale à la surface libre, relative au repère mobile, est égale à la vitesse normale de cette surface, relative au repère fixe. Cette condition s'écrit $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \tilde{U} \cdot \text{grad} F = 0$ avec $F(x, y, t) = y - \zeta(x, t)$, ou encore $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \tilde{u}_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \tilde{v}_1$ et $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \tilde{v}_2$.

- 4) On suppose désormais que les champs $\tilde{U}_i(x, y, t)$ et $\tilde{p}_i(x, y, t)$ ainsi que $\zeta(x, t)$ sont petits. En déduire les conditions aux limites $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -C_1 \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -C_2 \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial y}$ en $y = 0$.

En développant les valeurs $f[x, \zeta(x, t), t] = f(x, 0, t)[1 + O(\zeta)]$ des champs en surface pour les petites oscillations, on peut appliquer les conditions aux limites en $y = 0$ plutôt qu'en $y = \zeta(x, t)$. On linéarise alors les conditions aux limites cinématique à l'interface en utilisant $\tilde{v}_i = -C_i \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial y}$. Les termes $\tilde{u}_i \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ sont négligés.

- 5) Justifier les conditions aux limites $\tilde{p}_2 - \frac{U_0}{C_2} \zeta = \tilde{p}_1 - \frac{U_0}{C_1} \zeta + T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$, en $y = 0$.

Les conditions aux limites dynamiques expriment le saut de pression dû à la tension superficielle dans le cas où ζ est petit.

- 6) Justifier la recherche de solutions de la forme $\tilde{p}_1 = P_1(y) e^{ik_x x + st}$, $\tilde{p}_2 = P_2(y) e^{ik_x x + st}$ et $\zeta = \zeta_m e^{ik_x x + st}$ où $P_1(y)$, $P_2(y)$ et ζ_m sont complexes. Montrer que l'on peut écrire $P_1(y) = P_{1m} F_1(ky)$ et $P_2(y) = P_{2m} F_2(ky)$ avec $k = |k_x|$ où F_1 et F_2 sont deux fonctions que l'on explicitera.

Les équations étant linéaires à coefficients réels, la partie réelle d'une solution complexe est aussi solution. Comme les coefficients sont constants, les solutions sont des exponentielles. En reportant dans les équations $\Delta \tilde{p}_1 = 0$ et $\Delta \tilde{p}_2 = 0$, on obtient $\tilde{p}_1''(y) - k^2 \tilde{p}_1(y) = 0$ et $\tilde{p}_2''(y) - k^2 \tilde{p}_2(y) = 0$. En utilisant les conditions aux limites à l'infini, on voit que $P_1(y) = P_{1m} \exp(ky)$ et $P_2(y) = P_{2m} \exp(-ky)$ où P_{1m} et P_{2m} sont des amplitudes complexes arbitraires. On a donc $F_1(Y) = e^Y$ et $F_2(Y) = e^{-Y}$.

- 7) En déduire la relation de dispersion s'écrit $s = \alpha U_0 k - \beta T k^3$ où α et β sont des constantes que l'on exprimera en fonction de C_1 et C_2 .

En utilisant $P_1'(0) = k P_{1m}$ et $P_2'(0) = -k P_{2m}$, les conditions aux limites cinématiques en $y = 0$ s'écrivent $s \zeta_m = -C_1 k P_{1m}$ et $s \zeta_m = C_2 k P_{2m}$. La condition aux limites dynamique s'écrit $P_{1m} - \frac{U_0}{C_1} \zeta_m = P_{2m} - \frac{U_0}{C_2} \zeta_m + T k_x^2 \zeta_m$. En éliminant P_{1m} et P_{2m} et en écartant la solution triviale $\zeta_m = 0$, on en déduit $-\frac{s}{C_1 k} \zeta_m - \frac{U_0}{C_1} \zeta_m = \frac{s}{C_2 k} \zeta_m - \frac{U_0}{C_2} \zeta_m + T k_x^2 \zeta_m$. On en déduit donc $s = \alpha U_0 k - \beta T k^3$ avec $\alpha = \frac{1/C_2 - 1/C_1}{1/C_2 + 1/C_1}$ et $\beta = \frac{1}{1/C_2 + 1/C_1}$.

- 8) Dans le cas d'une cellule de Hele-Shaw, montrer que l'état de base est stable lorsque $\mu_1 > \mu_2$.

Si $\mu_2 < \mu_1$, on a $1/C_2 < 1/C_1$ et donc $\alpha < 0$: l'écoulement est stable.

- 9) Dans le cas $\mu_1 < \mu_2$, tracer le taux de croissance de l'instabilité en fonction de k . En déduire une estimation de la largeur des doigts de Saffman-Taylor.

Dans le cas instable $\mu_2 > \mu_1$, le taux de croissance s en fonction de k est un polynôme de degré trois donc le maximum est atteint pour $k = k_c$ avec $k_c = \sqrt{\frac{\alpha U_0}{3\beta T}}$. On peut imaginer que la longueur d'onde des doigts est la longueur d'onde la plus instable $l_c = 2\pi/k_c$.

Chapitre 2

Instabilité de Rayleigh-Bénard

Sommaire

1	Modèle de convection thermique	20
1.1	Équations du modèle	20
1.2	État conductif	22
1.3	Adimensionalisation des équations	22
2	Calcul de stabilité	23
2.1	Linéarisation des équations	23
2.2	Hypothèse bidimensionnelle	24
2.3	Solutions sans conditions aux limites	25
3	Calcul du seuil de convection	26
3.1	Solutions avec conditions aux limites	27
3.2	Méthode générale de recherche des modes propres	28
3.3	Seuil de convection thermique	28

Introduction

L'objectif est de rendre compte des mouvements de convection rencontrés dans un fluide soumis à un gradient de température en calculant le seuil de déclenchement de cette instabilité thermique.

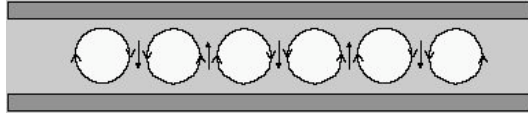


FIGURE 2.1 – *Rouleaux de convection.*

L'approximation de Boussinesq permet une formulation incompressible des équations de Navier-Stokes en prenant en compte des forces de flottabilité (poussée d'Archimède) dues à la dilatation du fluide et induite par une variation de la température.

Le système d'équations de l'approximation de Boussinesq étant énoncé, on s'intéresse à la configuration idéalisée d'une couche fluide horizontale forcée par un gradient thermique vertical en imposant les températures aux frontières. On suppose que les conditions aux limites en vitesse sont libres.

L'état conductif est caractérisé par une vitesse nulle et un profil linéaire de température à gradient vertical. On suppose que le bas de la couche est plus chaud que le haut et l'on augmente progressivement le forçage. Lorsque le forçage thermique est faible l'état conductif est stable. Une perturbation de température ou de vitesse est dissipée par la diffusion thermique ou la viscosité avant que la force d'Archimède n'ait eu le temps d'agir. Lorsque le forçage thermique dépasse un seuil critique, l'état conductif devient instable et des mouvements de convection apparaissent.

Cette étude de stabilité s'effectue en linéarisant les équations autour de l'état conductif. On montre alors que la stabilité de l'état conductif ne dépend que de la valeur d'un nombre sans dimension appelé nombre de Rayleigh.

1 Modèle de convection thermique

Pour décrire le mouvement de convection d'un fluide chauffé par le bas lorsque le champ de vitesse reste faible devant la vitesse du son, les équations de Navier-Stokes compressibles sont trop complexes et les équations de Navier-Stokes incompressibles ne rendent pas compte des forces de flottabilité. L'approximation de Boussinesq permet de prendre en compte ces forces tout en "filtrant" les ondes sonores.

1.1 Équations du modèle

Le modèle classiquement utilisé pour décrire la convection thermique dans un fluide repose sur les équations de Navier-Stokes incompressibles dans l'approximation de Boussinesq.

mation de Boussinesq. Les équations de ce modèle s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0, & \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_r} \operatorname{grad} p - \frac{\rho}{\rho_r} g \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}, \\ \frac{\rho}{\rho_r} &= 1 - \alpha (T - T_r), & \frac{dT}{dt} &= \kappa \Delta T, \end{aligned} \quad (2.1)$$

où $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$ est le vecteur des coordonnées, $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ un repère orthonormé, $\underline{U}(\underline{x}, t) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z$ est le champ de vitesse, $p(\underline{x}, t)$ le champ de pression, ρ_r une valeur de référence de masse volumique, $\rho(\underline{x}, t)$ le champ de masse volumique variable, α un coefficient de dilatation thermique, T_r une valeur de référence de température, $T(\underline{x}, t)$ le champ de température et κ le coefficient de diffusivité thermique. Le vecteur unitaire \underline{e}_z est vertical et g est l'intensité de la gravité. La notation $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad}$ est utilisée pour désigner la dérivée particulaire.

On voit que l'approximation de Boussinesq permet de prendre en compte la force d'Archimède $(\rho - \rho_r) g \underline{e}_z$ tout en filtrant les ondes sonores (compressibilité) à l'aide de la relation $\operatorname{div} \underline{U} = 0$. Les processus physiques en compétition sont donc la flottabilité due à la dilatation thermique, la viscosité et la conduction thermique.

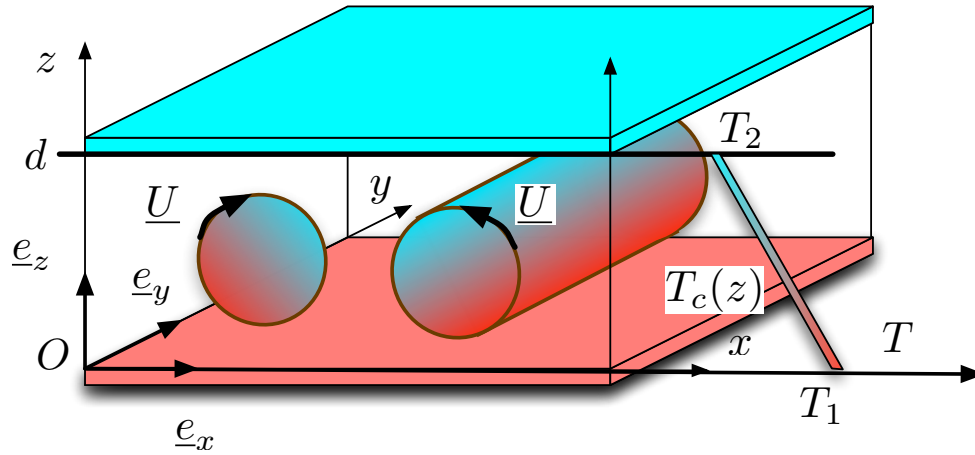


FIGURE 2.2 – Convection thermique entre deux plaques de températures respectives T_1 et T_2 .

On considère une couche fluide d'extension horizontale infinie comprise entre deux plaques planes horizontales séparées par une distance d (voir figure 2.2). La plaque située en $z = 0$ est maintenue à une température constante T_1 tandis que la plaque en $z = d$ est maintenue à une température constante T_2 . Les conditions aux limites en température s'écrivent donc

$$T = T_1 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{et} \quad T = T_2 \quad \text{en } z = d. \quad (2.2)$$

On suppose l'existence de conditions aux limites sans glissement pour la vitesse qui s'écrivent

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{et} \quad z = d. \quad (2.3)$$

1.2 État conductif

On appelle état conductif la solution stationnaire pour laquelle $\underline{U} = \underline{0}$. Dans ce cas, on montre facilement que le champ de température T est égal au profil conductif $T_c(z)$ qui s'écrit

$$T_c(z) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{d} z . \quad (2.4)$$

Le profil de masse volumique correspondant $\rho_c(z)$ vérifie donc

$$\frac{\rho_c(z)}{\rho_r} = 1 - \alpha [T_c(z) - T_r] = 1 - \alpha \left(T_1 - T_r - \frac{T_1 - T_2}{d} z \right) . \quad (2.5)$$

Le champ de pression, solution de $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$, est alors égal à

$$p_c(z) = p_r - \rho_r g z + \rho_r \alpha g (T_1 - T_r) z - \rho_r \alpha g \frac{T_1 - T_2}{2 d} z^2 , \quad (2.6)$$

où p_r est une pression de référence arbitraire.

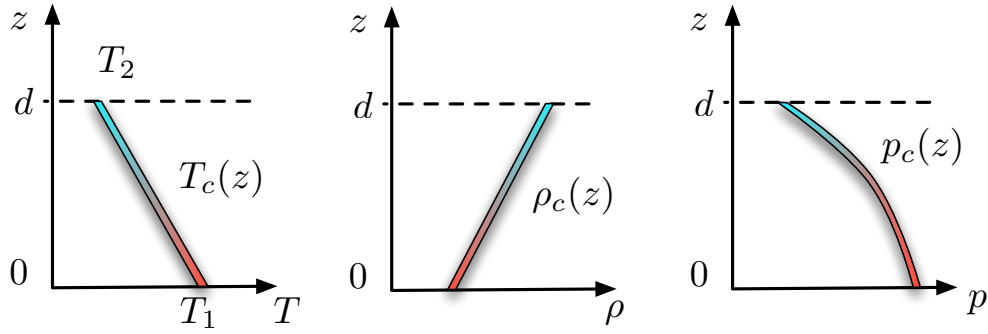


FIGURE 2.3 – Profils $T_c(z)$, $\rho_c(z)$ et $p_c(z)$ de l'état conductif.

On définit alors θ , l'écart de température au profil conductif par la relation $T(\underline{x}, t) = T_c(z) + \theta(\underline{x}, t)$. On effectue, de même, un changement de variable pour la pression en définissant le champ Π par la relation $p(\underline{x}, t) = p_c(z) + \rho_r \Pi(\underline{x}, t)$. Les équations du modèle sont alors équivalentes au système

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 , & \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} &= -\operatorname{grad} \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U} , \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \theta &= \frac{T_1 - T_2}{d} w + \kappa \Delta \theta . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\theta = 0 , \quad w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d . \quad (2.8)$$

1.3 Adimensionalisation des équations

On définit les variables adimensionnées

$$\underline{x} = [L] \underline{x}^* \quad \text{et} \quad t = [\tau] t^* \quad (2.9)$$

et les champs adimensionnés $\underline{U}^*(\underline{x}^*, t^*)$, $\theta^*(\underline{x}^*, t^*)$ et $\Pi^*(\underline{x}^*, t^*)$ par les relations

$$\underline{U} = [L] [\tau]^{-1} \underline{U}^* , \quad \theta = [\Theta] \theta^* \quad \text{et} \quad \Pi = [L]^2 [\tau]^{-2} \Pi^* , \quad (2.10)$$

où les unités de longueur, de temps et de température sont respectivement

$$[L] = d \quad [\tau] = d^2 / \kappa \quad \text{et} \quad [\Theta] = T_1 - T_2 . \quad (2.11)$$

L'unité de temps est ici basée sur la conductivité thermique κ . On aurait pu choisir la viscosité ν à la place de κ pour obtenir une autre adimensionalisation. Les équations adimensionnées s'écrivent ici

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_* \underline{U}^* &= 0 , \\ \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial t^*} + \underline{U}^* \cdot \operatorname{grad}_* \underline{U}^* &= -\operatorname{grad}_* \Pi^* + R P \theta^* \underline{e}_z + P \Delta_* \underline{U}^* , \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \underline{U}^* \cdot \operatorname{grad}_* \theta^* &= w^* + \Delta_* \theta^* , \end{aligned} \quad (2.12)$$

où les opérateurs div_* , grad_* et Δ_* sont obtenus en dérivant par rapport aux variables adimensionnées et où apparaissent les deux nombres sans dimension

$$R = \frac{\alpha g d^3 (T_1 - T_2)}{\nu \kappa} \quad \text{et} \quad P = \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.13)$$

respectivement appelés “nombre de Rayleigh” et “nombre de Prandtl”. Les conditions aux limites en variables adimensionnées s'écrivent

$$\theta^* = 0 , \quad w^* = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{en} \quad z^* = 0 \quad \text{et} \quad z^* = 1 . \quad (2.14)$$

2 Calcul de stabilité

Le calcul de stabilité est simple si on suppose que l'écoulement n'est borné dans aucune direction. En effet, les symétries de translations permettent de considérer des modes propres ayant la forme d'exponentielles en espace et en temps, solution du modèle linéarisé autour de la solution stationnaire conductive. Ce cas est présenté ici pour permettre une première approche du calcul de stabilité. Ces calculs seront utilisés plus tard pour les conditions aux limites réalistes dues à l'existence des deux plaques.

2.1 Linéarisation des équations

On travaille désormais en variables adimensionnées mais on décide d'omettre les exposants $*$ dans les notations pour les simplifier. Les équations s'écrivent donc

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 , \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} &= -\operatorname{grad} \Pi + R P \theta \underline{e}_z + P \Delta \underline{U} , \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \theta &= w + \Delta \theta , \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec les conditions aux limites

$$\theta = 0 , \quad w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1 . \quad (2.16)$$

Pour étudier la stabilité de l'équilibre conductif, on suppose que les perturbations \underline{U} , θ et Π sont petites, ce qui conduit à la linéarisation des équations. Les termes $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$ et $\underline{U} \cdot \text{grad } \theta$ sont en effet négligeables et le système linéaire s'écrit

$$\text{div } \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\text{grad } \Pi + R P \theta \underline{e}_z + P \Delta \underline{U}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = w + \Delta \theta, \quad (2.17)$$

avec les mêmes conditions aux limites.

2.2 Hypothèse bidimensionnelle

Par simplicité, on se restreint ici aux écoulements bidimensionnels dans un plan vertical. Une raison physique permettant de justifier cette approche est le fait que l'on observe des rouleaux de convections 2D au seuil de l'instabilité, du moins pour les conditions aux limites présentées ici.

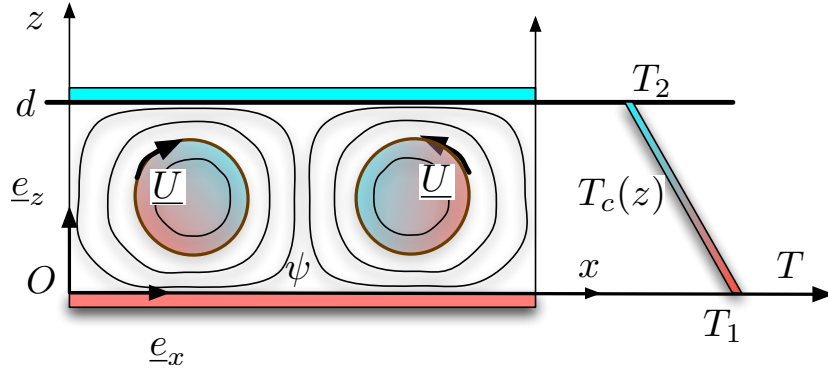


FIGURE 2.4 – Fonction de courant $\psi(x, z, t)$ dans le cas bidimensionnel.

On suppose ici que $v = 0$ et que $u(x, z, t)$, $w(x, z, t)$, $\theta(x, z, t)$ et $\Pi(x, z, t)$ ne dépendent pas de y . Les équations s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + P \Delta u, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= w + \Delta \theta, & \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + R P \theta + P \Delta w. \end{aligned} \quad (2.18)$$

avec $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ et les conditions aux limites

$$\theta = 0, \quad w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \quad (2.19)$$

L'équation $\text{div } \underline{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ entraîne alors qu'il existe une fonction de courant $\psi(x, z)$ telle que

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.20)$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement en u et w s'écrivent alors

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} - P \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + R P \theta + P \Delta \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.21)$$

On peut alors éliminer le champ Π de ces deux équations en multipliant la première par $-\frac{\partial}{\partial z}$, la seconde par $\frac{\partial}{\partial x}$ puis en les sommant. Le système linéaire s'écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = R P \frac{\partial \theta}{\partial x} + P \Delta^2 \psi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta, \quad (2.22)$$

où apparait le bilaplacien $\Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$. Les conditions aux limites s'écrivent maintenant

$$\theta = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1. \quad (2.23)$$

2.3 Solutions sans conditions aux limites

Dans un premier temps, nous allons chercher les solutions de l'équation linéaire

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = R P \frac{\partial \theta}{\partial x} + P \Delta^2 \psi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta, \quad (2.24)$$

en l'absence de conditions aux limites. Dans ce cas, les équations linéaires et à coefficients constants sont invariantes par translations en espace et en temps, ce qui permet la recherche de solutions complexes sous la forme

$$\psi(x, z, t) = \psi_m e^{i(k_x x + k_z z) + s t} \quad \text{et} \quad \theta(x, z, t) = \theta_m e^{i(k_x x + k_z z) + s t}, \quad (2.25)$$

où ψ_m et θ_m sont des amplitudes complexes, k_x et k_z les composantes du vecteur d'onde $\underline{k} = k_x \underline{e}_x + k_z \underline{e}_z$ et $s = \sigma - i\omega$ un complexe. Comme les équations sont linéaires à coefficients réels, la partie réelle d'une combinaison quelconque de solutions complexes est aussi solution. En reportant l'expression des solutions dans le système d'équations 2D on obtient :

$$\begin{aligned} -s k^2 \psi_m &= i k_x R P \theta_m + P k^4 \psi_m, \\ s \theta_m &= i k_x \psi_m - k^2 \theta_m, \end{aligned} \quad (2.26)$$

où $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ désigne le module du vecteur d'onde \underline{k} . On peut écrire ce système linéaire sous la forme

$$s \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P k^2 & -R P i k_x / k^2 \\ i k_x & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Ce système admet des solutions (ψ_m, θ_m) non triviales lorsque le déterminant du système est nul c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} -P k^2 - s & -R P i k_x / k^2 \\ i k_x & -k^2 - s \end{vmatrix} = 0, \quad (2.28)$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$s^2 + s(P+1)k^2 + P k^4 - R P k_x^2 / k^2 = 0. \quad (2.29)$$

Cette équation est la "relation de dispersion généralisée" du système linéarisé autour de l'équilibre considéré. Elle relie $s = \sigma - i\omega$ au vecteur d'onde \underline{k} et aux paramètres de contrôle. Cette relation généralise en effet la notion de "relation de dispersion" obtenue dans le cas particulier où σ est identiquement nul.

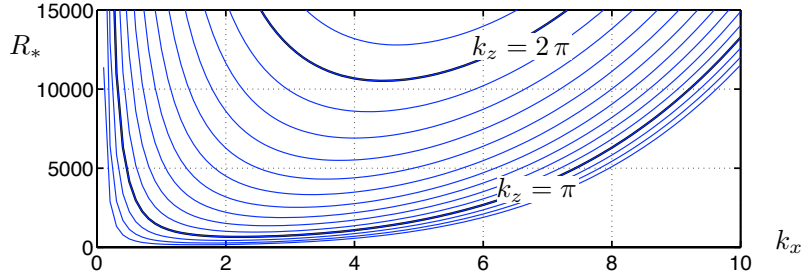


FIGURE 2.5 – Courbes $R_*(k_x, k_z)$ en fonction de k_x pour k_z fixé prenant des valeurs $k_z = \zeta \pi$ avec $\zeta = .7, .8, \dots, 2, 2.1$.

Lorsque k_x , k_z et s vérifient la relation de dispersion généralisée, les solutions, pour lesquelles (ψ_m, θ_m) est défini à une constante complexe multiplicative près, sont les “modes propres complexes”. Leurs parties réelles sont les modes propres.

Le discriminant de ce polynôme de degré deux en s est $(P-1)^2 k^4 + 4RPk_x^2/k^2$. Son signe étant toujours positif, les racines sont réelles. Pour déterminer leurs signes, on écrit alors l’équation sous la forme

$$\mathcal{P}(R, P, k_x, k_z; s) = s^2 + s(P+1)k^2 + P \frac{k_x^2}{k^2} \left(\frac{k^6}{k_x^2} - R \right) = 0. \quad (2.30)$$

Pour $R < k^6/k_x^2$ leur produit est positif et les deux racines sont négatives dans la mesure où leur somme l’est. Les deux modes de vecteur d’onde \underline{k} correspondant aux deux racines s_1 et s_2 sont alors amortis exponentiellement.

Pour $R > k^6/k_x^2$ un de ces modes croît exponentiellement dans la mesure où le produit des racines du polynôme en s est négatif.

Étant donné un vecteur d’onde $\underline{k} = k_x \underline{e}_x + k_z \underline{e}_z$, la valeur critique du nombre de Rayleigh pour laquelle un des deux modes de Fourier croît exponentiellement est donc

$$R_*(k_x, k_z) = \frac{k^6}{k_x^2} = \frac{(k_x^2 + k_z^2)^3}{k_x^2}. \quad (2.31)$$

La figure 2.5 représente la variation de $R_*(k_x, k_z)$ en fonction de k_x pour plusieurs valeurs de k_z fixée.

3 Calcul du seuil de convection

La superposition de deux modes obtenus en faisant abstraction des conditions aux limites permet de construire un mode satisfaisant les conditions aux limites libres. Une démarche systématique permettant d’éviter cette astuce est ensuite présentée. L’examen de la partie réelle des valeurs propres permet de déterminer le seuil de convection qui ne dépend que du nombre de Rayleigh.

3.1 Solutions avec conditions aux limites

Si le vecteur ${}^t(\psi_m, \theta_m)$ est solution du système linéaire (2.27), on peut écrire

$$\psi_m = -i \frac{s + k^2}{k_x} \theta_m . \quad (2.32)$$

D'autre part, les valeurs propres s du problème sans conditions aux limites ne dépendent pas du signe de k_z . Par conséquent, la superposition de deux modes propres complexes de vecteurs d'ondes respectifs

$$\underline{k}_+ = k_x \underline{e}_x + n \pi \underline{e}_z \quad \text{et} \quad \underline{k}_- = k_x \underline{e}_x - n \pi \underline{e}_z , \quad (2.33)$$

où k_x est un vecteur d'onde strictement positif et n est un nombre entier positif, et d'amplitudes respectives ${}^t(\psi_{m+}, \theta_{m+})$ et ${}^t(\psi_{m-}, \theta_{m-})$ définies par

$$\theta_{m+} = \frac{B}{2i} , \quad \psi_{m+} = -i \frac{s + k^2}{k_x} \theta_{m+} , \quad \theta_{m-} = -\theta_{m+} , \quad \psi_{m-} = -\psi_{m+} , \quad (2.34)$$

où B est une amplitude quelconque, est un nouveau mode propre qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} \psi(x, z, t) \\ \theta(x, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \frac{s+k^2}{k_x} \\ 1 \end{pmatrix} B \sin(n \pi z) e^{i k_x x + s t} . \quad (2.35)$$

Lorsque s est réel, la partie réelle de cette solution complexe est une solution réelle qui s'écrit, en choisissant B réel,

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \frac{s + k^2}{k_x} B \sin(k_x x) \sin(n \pi z) e^{s t} \\ \theta(x, z, t) &= B \cos(k_x x) \sin(n \pi z) e^{s t} , . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Il est en effet toujours possible de se ramener au cas où B est réel en changeant l'origine de la coordonnée x . En choisissant n entier, la solution ainsi construite vérifie les conditions aux limites $\psi(x, 0, t) = \psi(x, 1, t) = 0$ et $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(x, 0, t) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(x, 1, t)$. La figure 2.6 représente les iso-contours des champs réels θ et ψ pour $n = 1$.

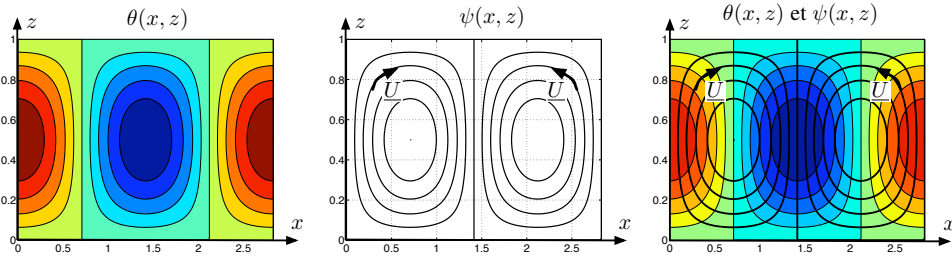


FIGURE 2.6 – Iso-contours des champs $\theta(x, z) = \cos(k_x x) \sin(\pi z)$ et $\psi(x, z) = \sin(k_x x) \sin(\pi z)$ pour $k_x = \pi/\sqrt{2}$.

On a donc construit une famille complète de solutions des équations linéaires avec conditions aux limites.

3.2 Méthode générale de recherche des modes propres

La démarche que nous avons suivie, consistant à construire une solution satisfaisant les conditions aux limites en combinant deux solutions en domaine infini relève plus de la chance que d'une démarche systématique. Nous présentons donc une méthode générale qui pourra être utilisée pour d'autres conditions aux limites ou d'autres systèmes.

Dans la mesure où le problème est invariant par translations en t et en x , mais pas en z , on cherche des solutions complexes sous la forme

$$\psi(x, z, t) = \Psi(z) e^{i k_x x + s t} \quad \text{et} \quad \theta(x, z, t) = \Theta(z) e^{i k_x x + s t}, \quad (2.37)$$

où $\Psi(z)$ et $\Theta(z)$ sont des fonctions complexes de la coordonnée verticale z . En reportant dans les équations on obtient le système

$$\begin{aligned} s (D^2 - k_x^2) \Psi &= i k_x R P \Theta + P (D^2 - k_x^2)^2 \Psi, \\ s \Theta &= i k_x \Psi + (D^2 - k_x^2) \Theta, \end{aligned} \quad (2.38)$$

où $D = \frac{d}{dz}$ est l'opérateur de dérivation par rapport à la variable z . Les conditions aux limites s'écrivent

$$\Theta(0) = \Theta(1) = 0, \quad \Psi(0) = \Psi(1) = 0 \quad \text{et} \quad D^2 \Psi(0) = D^2 \Psi(1) = 0. \quad (2.39)$$

Pour éliminer la fonction $\Theta(z)$, on écrit le système sous la forme

$$\begin{aligned} [s - P (D^2 - k_x^2)] (D^2 - k_x^2) \Psi &= i k_x R P \Theta, \\ [s - (D^2 - k_x^2)] \Theta &= i k_x \Psi. \end{aligned} \quad (2.40)$$

On applique l'opérateur $s - (D^2 - k_x^2)$ à la première équation ce qui conduit à

$$[s - (D^2 - k_x^2)] [s - P (D^2 - k_x^2)] (D^2 - k_x^2) \Psi = -k_x^2 R P \Psi. \quad (2.41)$$

Comme $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$, les conditions aux limites en température s'écrivent

$$s D^2 \Psi - P (D^2 - k_x^2)^2 \Psi = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1. \quad (2.42)$$

On doit résoudre l'équation

$$[s - (D^2 - k_x^2)] [s - P (D^2 - k_x^2)] (D^2 - k_x^2) \Psi = -k_x^2 R P \Psi. \quad (2.43)$$

avec les conditions aux limites

$$\Psi = 0, \quad D^2 \Psi = 0 \quad \text{et} \quad D^4 \Psi = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1. \quad (2.44)$$

La symétrie $z \rightarrow -z$ de ce système entraîne que les solutions sont toutes de la forme $\Psi = A \sin(n \pi z)$ où A est une amplitude quelconque et n est un nombre entier. On retrouve ainsi les solutions de la forme (2.35).

3.3 Seuil de convection thermique

On a donc trouvé une base de solutions qui permet d'écrire toute solution comme étant la partie réelle de solutions complexes de la forme

$$\psi(x, z, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin(n \pi z) \int_{\mathbb{R}} \left[\widehat{\psi}_n^+(k_x, t) + \widehat{\psi}_n^-(k_x, t) \right] e^{i k_x x} dk_x,$$

$$\theta(x, z, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin(n \pi z) \int_{\mathbb{R}} \left[\widehat{\theta}_n^+(k_x, t) + \widehat{\theta}_n^-(k_x, t) \right] e^{i k_x x} dk_x \quad (2.45)$$

où \mathbb{N}^* est l'espace des entiers strictement positifs et où les amplitudes complexes s'écrivent

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_n^\pm(k_x, t) &= B_n^\pm(k_x) \exp \left[S_n^\pm(k_x) t \right], \\ \widehat{\psi}_n^\pm(k_x, t) &= -i \frac{S_n^\pm(k_x) + k_x^2 + n^2 \pi^2}{k_x} \widehat{\theta}_n^\pm(k_x, t), \end{aligned} \quad (2.46)$$

pour lesquelles les amplitudes complexes $B_n^+(k_x)$ et $B_n^-(k_x)$ sont totalement arbitraires et où $S_n^+(k_x)$ et $S_n^-(k_x)$ désignent les deux racines en s du polynôme

$$s^2 + s(P+1)(k_x^2 + n^2 \pi^2) + P \frac{k_x^2}{k_x^2 + n^2 \pi^2} \left[\frac{(k_x^2 + n^2 \pi^2)^3}{k_x^2} - R \right] = 0. \quad (2.47)$$

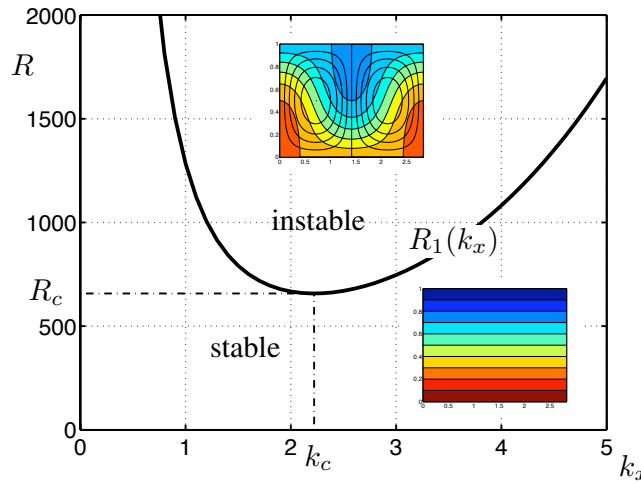


FIGURE 2.7 – Courbe de la fonction $R_1(k_x) = (k_x^2 + \pi^2)^3 / k_x^2$. Minimum en $(k_c, R_c) = (\pi/\sqrt{2}, 27 \pi^4/4)$.

On trace alors la courbe $R_1(k_x) = R_*(k_x, \pi) = (k_x^2 + \pi^2)^3 / k_x^2$ (voir figure 2.7). On montre facilement que son minimum est atteint pour le couple $(k_x, R) = (k_c, R_c)$ avec

$$R_c = \frac{27 \pi^4}{4} \sim 657 \quad \text{et} \quad k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sim 2,2. \quad (2.48)$$

On peut donc conclure en remarquant que si $R \leq R_c$, tous les modes obtenus pour tous les k_x et n possibles correspondent à des valeurs de $S_n^\pm(k_x)$ négatives. L'état conductif est alors stable dans la mesure où une petite perturbation $\psi(x, z, 0)$, $\theta(x, z, 0)$ quelconque tendra vers zéro avec le temps. En revanche, si $R > R_c$, il existe au moins un mode (en réalité un continuum) dont le taux de croissance est positif. L'équilibre conductif est alors instable.

Le seuil de convection est donc atteint pour $R = R_c \sim 657$. Dans une couche d'extension horizontale infinie, le mode le plus instable correspond à $k_x = k_c$, c'est-à-dire à la longueur d'onde $L_c = 2 \pi / k_c \sim 2,8$.

Du point de vue expérimental, lorsque l'on augmente progressivement le nombre de Rayleigh, par exemple en accentuant la différence de température

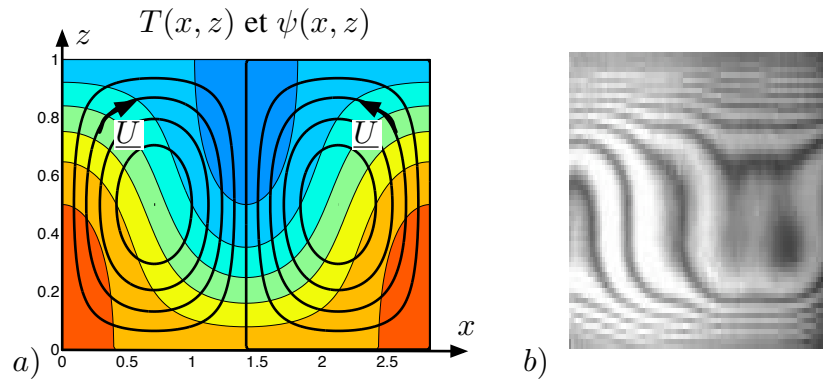


FIGURE 2.8 – a) Iso-contours des champs $T(x, z)$ et $\psi(x, z)$. b) Visualisation expérimentale du champ de densité.

entre les deux plaques, l'état conductif devient instable et laisse la place à des rouleaux de convection (figure 2.8) stables dont l'amplitude croît comme le carré de l'écart ($R - R_c$). Cette constatation permet de déduire que l'on est dans le cas d'une bifurcation fourche supercritique.

Dans le cas où les conditions aux limites libres pour la vitesse sont remplacées par des conditions aux limites rigides $u = w = 0$, l'application de la méthode générale conduit aux valeurs critiques

$$R_c \sim 1707 \quad \text{et} \quad k_c = 3.117. \quad (2.49)$$

On voit que le frottement sur les parois retarde l'apparition de la convection et diminue la longueur d'onde du mode le plus instable.

FORMULAIRE

Équations du modèle de convection thermique

Les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq avec conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0, & \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_r} \operatorname{grad} p - \frac{\rho}{\rho_r} g \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}, \\ \frac{\rho}{\rho_r} &= 1 - \alpha (T - T_r), & \frac{dT}{dt} &= \kappa \Delta T, \\ T &= T_1 \quad \text{en } z = 0 & \text{et} \quad T &= T_2 \quad \text{en } z = d, \\ w &= 0 \quad \text{et} & \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \end{aligned}$$

État conductif

En notant $T(\underline{x}, t) = T_c(z) + \theta(\underline{x}, t)$ et $p(\underline{x}, t) = p_c(z) + \rho_r \Pi(\underline{x}, t)$, où $T_c(z) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{d} z$ et $p_c(z) = p_r - \rho_r g z + \rho_r \alpha g (T_1 - T_r) z - \rho_r \alpha g \frac{T_1 - T_2}{2d} z^2$ désignent

l'état conductif (stationnaire), le modèle s'écrit :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} &= -\operatorname{grad} \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \theta &= \frac{T_1 - T_2}{d} w + \kappa \Delta \theta. \\ \theta = 0, \quad w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 &\quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \end{aligned}$$

Adimensionalisation des équations

Le choix des unités de longueur $[L] = d$, de temps $[\tau] = d^2/\kappa$ et de température $[\Theta] = T_1 - T_2$ conduit aux équations :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_* \underline{U}^* = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial t^*} + \underline{U}^* \cdot \operatorname{grad}_* \underline{U}^* &= -\operatorname{grad}_* \Pi^* + R P \theta^* \underline{e}_z + P \Delta_* \underline{U}^*, \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \underline{U}^* \cdot \operatorname{grad}_* \theta^* &= w^* + \Delta_* \theta^*, \\ \theta^* = 0, \quad w^* = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0 &\quad \text{en } z^* = 0 \text{ et } z^* = 1 \\ \text{avec } R = \frac{\alpha g d^3 (T_1 - T_2)}{\nu \kappa} \text{ (Rayleigh)} \quad \text{et} \quad P = \frac{\nu}{\kappa} \text{ (Prandtl)}. \end{aligned}$$

Linéarisation des équations

En supposant que les perturbations \underline{U} , θ et Π sont petites, les équations linéarisées s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} &= -\operatorname{grad} \Pi + R P \theta \underline{e}_z + P \Delta \underline{U}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = w + \Delta \theta, \\ \text{avec } \theta = 0, \quad w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 &\quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \end{aligned}$$

Hypothèse bidimensionnelle

Dans le cas bidimensionnel, l'introduction d'une fonction de courant ψ telle que $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ conduit, après élimination de la pression, au système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = R P \frac{\partial \theta}{\partial x} + P \Delta^2 \psi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta, \\ \text{avec } \theta = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 &\quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \end{aligned}$$

Solutions sans conditions aux limites

En l'absence de conditions aux limites, les équations linéaires et à coefficients constants sont invariantes par translations en espace et en temps, ce qui permet la recherche de solutions complexes et l'expression de relation de dispersion généralisée :

$$\begin{aligned} & (\psi, \theta) = (\psi_m, \theta_m) \exp [i(k_x x + k_z z) + s t] , \\ \Rightarrow \quad s \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -P k^2 & -R P i k_x / k^2 \\ i k_x & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad & s^2 + s(P+1)k^2 + Pk^4 - R P k_x^2 / k^2 = 0 . \end{aligned}$$

Solutions avec conditions aux limites

La superposition des deux modes de vecteurs d'ondes $\underline{k}_+ = k_x \underline{e}_x + n\pi \underline{e}_z$ et $\underline{k}_- = k_x \underline{e}_x - n\pi \underline{e}_z$, d'amplitudes opposées mais de même valeur propre s , permet de construire les solutions réelles :

$$\begin{aligned} \theta(x, z, t) &= B \cos(k_x x) \sin(n\pi z) e^{st} , \\ \psi(x, z, t) &= \frac{s + k^2}{k_x} B \sin(k_x x) \sin(n\pi z) e^{st} . \end{aligned}$$

En choisissant n entier, cette solution vérifie les conditions aux limites $\psi(x, 0, t) = \psi(x, 1, t) = 0$ et $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(x, 0, t) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(x, 1, t)$.

Seuil de convection thermique

La condition d'instabilité $R > R_*(k_x, k_z) = k^6 / k_x^2$ conduit à la recherche du minimum de $R_1(k_x) = (k_x^2 + \pi^2)^3 / k_x^2$ pour $n = 1$ et donc au seuil de l'instabilité décrit par :

$$R_c = \frac{27 \pi^4}{4} \sim 657 \quad \text{et} \quad k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sim 2,2 .$$

EXERCICES

EXERCICE 2.1 Convection en milieu poreux

On considère un fluide dans un milieu poreux compris entre deux plaques planes horizontales d'équations $z = 0$ et $z = d$ et maintenues à des températures respectives T_1 et T_2 avec $T_1 > T_2$. On suppose que les champs de vitesse $\underline{U} = (u, v, w)$, de pression p et de température T sont régis par le modèle

constitué des équations

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0, & \rho &= \rho_r [1 - \alpha (T - T_r)], \\ \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_r} \operatorname{grad} p - \frac{\rho}{\rho_r} g \underline{e}_z - \beta \underline{U}, & \frac{dT}{dt} &= \kappa \Delta T \end{aligned} \quad (2.50)$$

où α , β , κ , ρ_r et T_r sont des paramètres constants et g la gravité, avec les conditions aux limites en température et en vitesse $T = T_1$ en $z = 0$, $T = T_2$ en $z = d$, et $w = 0$ en $z = 0$ et $z = d$.

- 1) Déterminer le profil de température conductif $T_c(z)$ (à l'équilibre) solution du modèle lorsque $\underline{U} = \underline{0}$. En déduire le profil de pression $p_c(z)$ en supposant que $p_c(0) = p_r$ où p_r est une pression de référence. On pourra noter $\Gamma = (T_1 - T_2)/d$.

| On a $T_c(z) = T_1 - \Gamma z$ et $p_c(z) = p_r - \rho_r g [1 - \alpha (T_r - T_1)] z - \frac{1}{2} \rho_r \alpha g \Gamma z^2$.

- 2) On note $\theta(x, y, z, t) = T(x, y, z, t) - T_c(z)$ et $p(x, y, z, t) = p_c(z) + \rho_r \Pi(x, y, z, t)$. Écrire les équations du modèle en fonction de \underline{U} et de ces nouveaux champs.

| Les équations du modèle avec les nouvelles variables sont

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{d\underline{U}}{dt} = -\operatorname{grad} \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z - \beta \underline{U}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \Gamma w + \kappa \Delta \theta.$$

- 3) Montrer que les équations du modèle, linéarisées autour de l'état conductif, peuvent s'écrire sous la forme $\operatorname{div} \underline{U} = 0$, $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z - \beta \underline{U}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Gamma w + \kappa \Delta \theta$.

| Il suffit de remplacer $\frac{d}{dt}$ par $\frac{\partial}{\partial t}$ en négligeant $\underline{U} \cdot \operatorname{grad}$.

- 4) On choisit d'adimensionnaliser les équations avec les unités :

$$[L] = d, \quad [\tau] = d^2/\kappa, \quad [\Theta] = T_1 - T_2, \quad [U] = [L]/[\tau] \text{ et } [\Pi] = [U]^2.$$

Écrire les équations du modèle linéarisé ainsi adimensionnées en mettant en évidence les deux nombres sans dimension

$$E = \frac{\beta d^2}{\kappa} \quad \text{et} \quad F = \frac{\alpha g d (T_1 - T_2)}{\kappa \beta}. \quad (2.51)$$

| Les équations linéaires adimensionnées s'écrivent (en omettant les exposants *) :

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \Pi + E F \theta \underline{e}_z - E \underline{U}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = w + \Delta \theta.$$

| Les conditions aux limites s'écrivent $\theta = 0$ et $w = 0$ en $z = 0$ et $z = 1$.

- 5) On se restreint au problème bidimensionnel et l'on introduit donc une fonction de courant $\psi(x, z, t)$ telle que $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Écrire les équations du mouvement à l'aide de cette fonction de courant après élimination de la pression (en prenant le rotationnel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement). Écrire les conditions aux limites.

| Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = E F \frac{\partial \theta}{\partial x} - E \Delta \psi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta.$$

| Les équations aux limites s'écrivent $\theta = 0$ et $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ en $z = 0$ et $z = 1$.

6) On cherche des solutions complexes de la forme

$$[\psi(x, z, t), \theta(x, z, t)] = [\psi_m, \theta_m] e^{i(k_x x + k_z z) + s t}. \quad (2.52)$$

Écrire le système linéaire vérifié par les amplitudes complexes (ψ_m, θ_m) .
En déduire que les solutions sont de la forme

$$[\psi(x, z, t), \theta(x, z, t)] = \theta_m \left[-i \frac{s + k^2}{k_x}, 1 \right] e^{i(k_x x + k_z z) + s t}. \quad (2.53)$$

En remplaçant l'expression des modes dans les équations, on obtient

$$-s k^2 \psi_m = i k_x E F \theta_m + E k^2 \psi_m, \quad s \theta_m = i k_x \psi_m - k^2 \theta_m.$$

7) En déduire l'équation de dispersion généralisée reliant s , k_x et k_z . On pourra noter $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$.

L'équation de dispersion généralisée s'écrit alors

$$s^2 + s(E + k^2) + E k^2 - E F k_x^2 / k^2 = 0.$$

8) Montrer que les racines s de la relation de dispersion généralisée sont réelles et de somme négative pour tout couple (k_x, k_z) .

Le discriminant $(E - k^2)^2 + 4 E F k_x^2 / k^2$ est toujours positif. Les racines sont donc réelles. Leur somme $-(E + k^2)$ est négative.

9) Quelle condition sur (E, F) régit l'existence d'une racine s positive pour un couple (k_x, k_z) donné ?

Pour (k_x, k_z) donnés, il existe une racine s positive pour $F \geq k^4 / k_x^2$ (produit des racines).

10) Montrer que le couple de champs complexes $[\psi(x, z, t), \theta(x, z, t)] = \theta_m \left[-i \frac{s + k^2}{k_x}, 1 \right] \sin(k_z z) e^{i k_x x + s t}$, avec s solution de la relation de dispersion généralisée, est la somme de solutions de la forme (2.53). Justifier le choix $k_z = n \pi$ avec n entier strictement positif pour satisfaire les conditions aux limites.

La décomposition $\sin(k_z z) = \frac{1}{2i} e^{i k_z z} - \frac{1}{2i} e^{-i k_z z}$ répond à la question dans la mesure où la relation de dispersion ainsi que la relation $\psi_m = -i \frac{s + k^2}{k_x} \theta_m$ sont invariantes en changeant k_z en $-k_z$. Le choix $k_z = n \pi$ avec n entier permet de satisfaire les conditions aux limites $\theta = 0$ et $w = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ en $z = 0$ et $z = 1$.

11) Dans un plan (k_x, F) , tracer les courbes $F_*(k_x, n)$ délimitant la croissance ou la décroissance des modes de vecteur d'onde (k_x, k_z) avec $k_z = n \pi$.

Les courbes $F_*(k_x, n) = (k_x^2 + n^2 \pi^2)^2 / k_x^2$ ont une allure qui ressemble à celle des courbes $R_*(k_x, n)$ de la convection de Rayleigh-Bénard.

12) Calculer le minimum de la fonction $F_*(k, 1)$.

Le minimum de la courbe $F_*(k_x, 1) = (k_x^2 + \pi^2)^2 / k_x^2$ est obtenu pour $k = \pi$ et vaut $F = 4 \pi^2$.

13) Montrer que le seuil de l'instabilité convective ne dépend pas de E et calculer le seuil $F = F_c$ de cette instabilité.

Le seuil d'instabilité est obtenu pour $F = F_c = 4 \pi^2$ car $F_*(k_x, 1) < F_*(k_x, n)$ pour tout $n > 1$.

14) Calculer la longueur d'onde des rouleaux de convection observés au seuil de l'instabilité. Comparer avec la distance entre les deux plaques.

La longueur d'onde des rouleaux au seuil est $L_c = 2\pi/k_c = 2$ avec $k_c = \pi$. Cela correspond au double de la distance entre les deux plaques.

Chapitre 3

Linéarisation autour de l'équilibre

Sommaire

1	Systèmes dynamiques simples	38
1.1	Forme normale de la bifurcation fourche	39
1.2	Bifurcations d'un équilibre stable	40
1.3	Exemple du pendule simple	42
2	Systèmes conservatifs ou dissipatifs	44
2.1	Évolution du volume dans l'espace des phases	44
2.2	Systèmes dynamiques hamiltoniens	45
2.3	L'oscillateur de Van der Pol	46
3	Équations aux dérivées partielles	48
3.1	Modèle linéaire	48
3.2	Linéarisation autour d'un équilibre	50
3.3	Calcul de stabilité dans le cas général	50

Introduction

Les modèles utilisés pour décrire les systèmes physiques évoluant dans le temps peuvent être des systèmes d'équations différentielles ordinaires, que nous appellerons "systèmes dynamiques", ou des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Nous nous intéressons ici aux équilibres de ces systèmes, c'est-à-dire à leurs solutions stationnaires.

La stabilité de ces équilibres est obtenue en considérant l'évolution temporelle de leurs petites perturbations. Cette évolution est décrite par un système d'équations linéaires obtenu en négligeant les termes non linéaires qui sont d'ordre deux. Nous décrivons, sur des exemples de complexité croissante, les techniques mathématiques qui permettent de construire cette linéarisation et d'en étudier les solutions.

La plupart des modèles physiques dépendent de paramètres de contrôle que l'on peut réduire à des nombres sans dimensions (nombre de Reynolds, nombre de Rayleigh, nombre de Richardson ...). Lorsque ces paramètres changent, d'une expérience à l'autre, le nombre d'équilibres ainsi que leur stabilité changent. En variant continument les paramètres de contrôle, on peut déterminer les seuils de "bifurcation", c'est-à-dire les valeurs de ces paramètres pour lesquels le nombre d'équilibre ou leur stabilité change, les deux allant en général de pair.

Les bifurcations supercritiques, pour lesquelles de nouveaux équilibres stables apparaissent au-delà du seuil de déstabilisation d'un équilibre trivial, se rencontrent, par exemple, dans les systèmes forcés par des gradients thermiques. Les bifurcations sous-critiques, pour lesquelles des équilibres instables coexistent avec un équilibre trivial avant qu'il ne se déstabilise, se rencontrent, par exemple, dans les systèmes forcés par des gradients de vitesses.

Une autre notion très importante est la distinction entre les systèmes dissipatifs et les systèmes conservatifs. Ces derniers décrivent, par exemple, les systèmes physiques pour lesquels on néglige les phénomènes de frottements ou de diffusion. Sur le plan mathématique, cette distinction peut se faire en examinant l'évolution d'un volume d'états dans "l'espace des phases".

1 Systèmes dynamiques simples

Le système dynamique appelé "forme normale de la bifurcation fourche" est le prototype de l'instabilité d'un système dont un équilibre trivial, ou plutôt invariant par une symétrie, se déstabilise lorsque l'on varie un paramètre de contrôle. On peut le voir comme l'équation qui régit la croissance linéaire et la saturation linéaire de l'amplitude d'un mode instable au voisinage d'une instabilité stationnaire dans un système complexe comme, par exemple, la convection de Rayleigh-Bénard.

D'une manière générale, la déstabilisation d'un équilibre stable, observée en variant les paramètres de contrôle d'un système, peut être vue comme le passage à travers l'axe des imaginaires purs dans le plan complexe d'une ou plusieurs valeurs propres du système linéarisé autour de l'équilibre étudié. Cette linéarisa-

tion est présenté pour le cas des systèmes dynamique autonomes quelconques ainsi que pour le cas particulier du pendule simple.

1.1 Forme normale de la bifurcation fourche

On considère le système dynamique appelée “forme normale de la bifurcation fourche” et régi par l’équation différentielle ordinaire :

$$\dot{X} = F(X) = \mu X + \alpha X^3, \quad (3.1)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}$ est la solution recherchée et $(\mu, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ deux paramètres de contrôle. Les équilibres, ou solutions stationnaires, sont les états X_e solutions de l’équation $F(X_e) = 0$. La figure 3.1 représente ces équilibres en fonction des valeurs des paramètres α et μ .

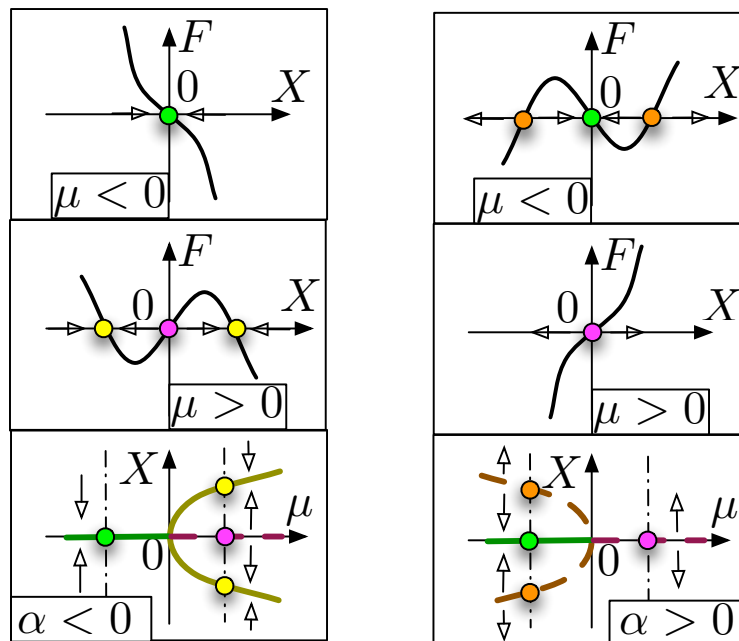


FIGURE 3.1 – Diagramme de la bifurcation fourche. Équilibres solutions de l’équation $F(X) = 0$ pour différentes valeurs de α et μ et leur stabilité.

On remarque que l’équilibre $X = 0$ existe pour toutes les valeurs des paramètres tandis que les équilibres $X_{\pm} = \pm \sqrt{-\mu/\alpha}$ existent uniquement pour $\alpha \mu < 0$. La stabilité d’un équilibre X_e est obtenue en posant $X(t) = X_e + A(t)$ et en effectuant le développement limité

$$\dot{X} = \dot{A} = F(X_e + A) = F'(X_e) A + O(|A|^2), \quad (3.2)$$

où A est supposé être une petite perturbation et $F'(X) = \mu + 3\alpha X^2$ est la dérivée de $F(X)$. Tant que A reste petit, on doit donc résoudre

$$\dot{A} = s A \quad \text{avec} \quad s = F'(X_e) \implies A(t) = A(0) e^{s t}. \quad (3.3)$$

On en déduit que X_e est stable si $s < 0$, marginal pour $s = 0$ et instable pour $s > 0$. On obtient alors le “diagramme de bifurcation” de la figure 3.1 où les

équilibres stables sont représentés en trait plein et les équilibre instables en pointillé.

L'équilibre $X = 0$ se déstabilise pour $\mu \geq 0$. On dit que cet équilibre subit une "bifurcation" pour la valeur critique $\mu = 0$ du paramètre. Pour $\alpha < 0$, la bifurcation est "supercritique" dans la mesure où deux équilibres stables apparaissent pour $\mu > 0$. Pour $\alpha > 0$, la bifurcation est "sous-critique" dans la mesure où deux équilibres instables existent pour $\mu < 0$.

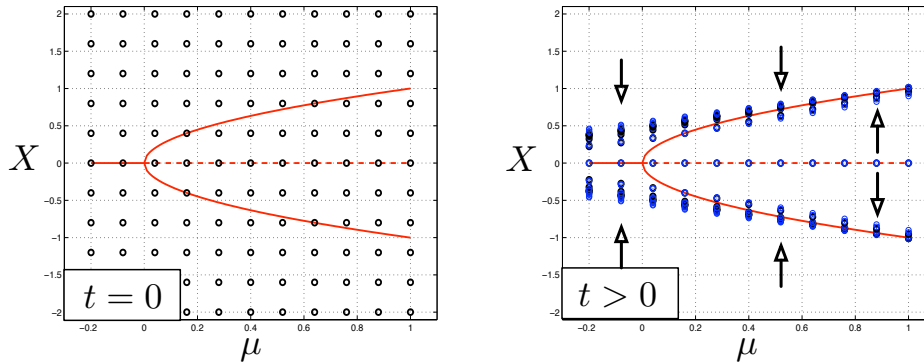


FIGURE 3.2 – Bifurcation fourche supercritique. a) Conditions initiales $[\mu, X(0)]$ réparties régulièrement. b) Positions des points $[\mu, X(t)]$ au cours du temps.

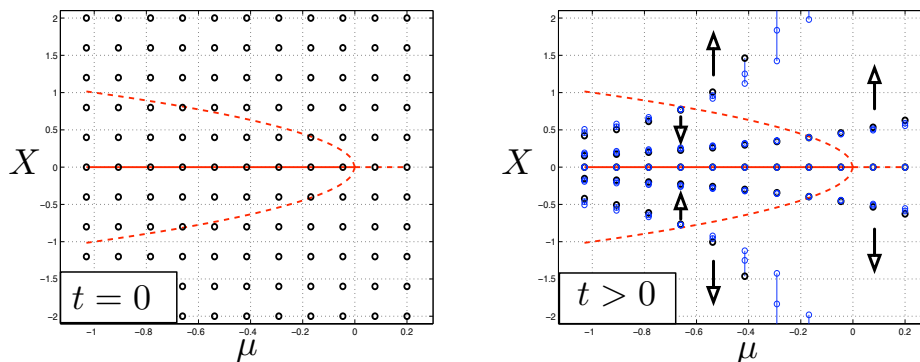


FIGURE 3.3 – Bifurcation fourche sous-critique. a) Conditions initiales $[\mu, X(0)]$ réparties régulièrement. b) Positions des points $[\mu, X(t)]$ au cours du temps.

La figure 3.2 représente l'évolution de conditions initiales dans le cas surpercritique $\alpha < 0$. On voit que les trajectoires sont des points, des segments de droites ou des droites qui convergent vers un des équilibres stables.

1.2 Bifurcations d'un équilibre stable

L'exemple précédent est un cas particulier des systèmes dynamiques autonomes (indépendants du temps) qui s'écrivent

$$\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X}) \iff \dot{X}_i = F_i(X_1, \dots, X_n) \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

avec $\underline{X} = {}^t(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que \underline{F} est continuellement différentiable. Une solution $\underline{X}(t)$ de ce système décrit une “trajectoire” (voir figure 3.4) dans “l’espace des phases” \mathbb{R}^n . On suppose que \underline{F} dépend de m paramètres de contrôle $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$. On montre (théorème de Cauchy) qu’une condition initiale $\underline{X}(0)$ donne naissance à une et une seule trajectoire $\underline{X}(t)$. On en déduit que, pour un système dynamique autonome, deux trajectoires l’espace des phases ne se coupent jamais, sauf en un point d’équilibre vers lequel elles tendent toutes les deux.

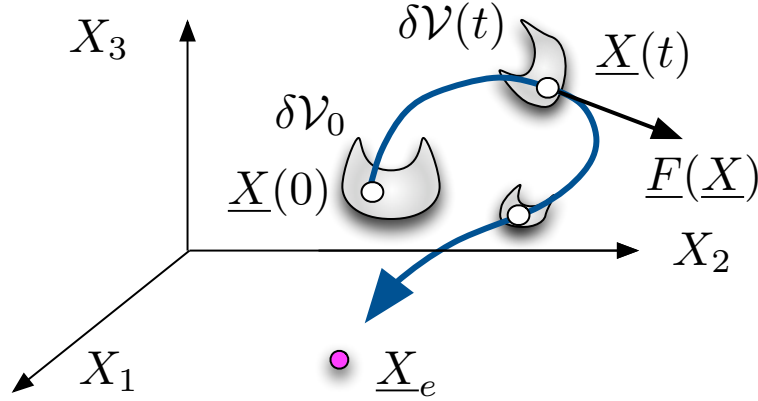


FIGURE 3.4 – Système dynamique à trois degrés de libertés.

Un point d’équilibre \underline{X}_e , formant à lui seul une trajectoire, est solution de l’équation implicite $\underline{F}(\underline{X}_e) = \underline{0}$. On dit aussi que c’est une solution stationnaire ou encore un point critique du système dynamique. Pour étudier la stabilité d’un tel équilibre, on pose $\underline{X}(t) = \underline{X}_e + \tilde{\underline{X}}(t)$ où $\tilde{\underline{X}}$ est une petite perturbation et on peut écrire le système sous la forme

$$\dot{\underline{X}} = \dot{\tilde{\underline{X}}} = \underline{DF}(\underline{X}_e) \cdot \tilde{\underline{X}} + O(\|\tilde{\underline{X}}\|^2) \quad (3.5)$$

où $\underline{DF}(\underline{X}_e)$ est la jacobienne de \underline{F} en \underline{X}_e de composantes $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\underline{X}_e)$. Tant que $\tilde{\underline{X}}$ reste petit, on doit donc résoudre

$$\dot{\tilde{\underline{X}}} = \underline{\Lambda} \tilde{\underline{X}} \quad \text{avec} \quad \underline{\Lambda} = \underline{DF}(\underline{X}_e). \quad (3.6)$$

Si $\underline{\Lambda}$ est diagonalisable, on peut écrire

$$\tilde{\underline{X}}(t) = \sum_{l=1}^n A_l(t) \underline{\phi}_l \quad \text{avec} \quad \underline{\Lambda} \cdot \underline{\phi}_l = s_l \underline{\phi}_l, \quad (3.7)$$

où les s_l , pour $l = 1, \dots, n$ sont les n valeurs propres de $\underline{\Lambda}$, réelles ou complexes, et les $\underline{\phi}_l$ sont les vecteurs propres associés, réels ou complexes. On doit donc résoudre

$$\dot{A}_l = s_l A_l \implies A_l(t) = A_l(0) e^{s_l t}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

La stabilité de l’équilibre \underline{X}_e dépend donc du signe de la partie réelle des valeurs propres s_l de la matrice $\underline{\Lambda} = \underline{DF}(\underline{X}_e)$. Si toutes les valeurs propres s_l ont une partie réelle négative, l’équilibre \underline{X}_e est stable. Si une ou plusieurs de ces valeurs propres possède une partie réelle positive, l’équilibre est instable

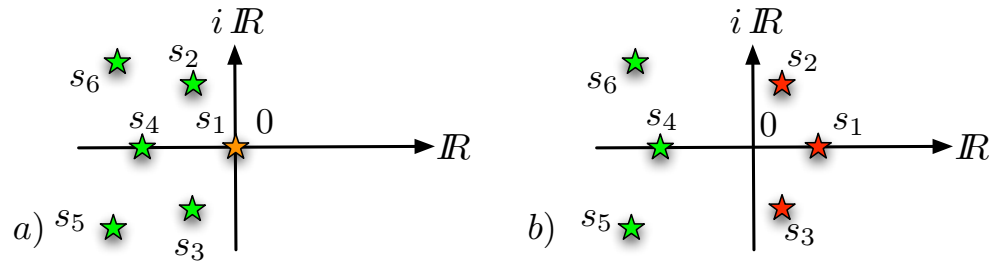


FIGURE 3.5 – Exemples de positions des valeurs propres s_l dans le plan complexe $\mathbb{C} = (\mathbb{R}, i\mathbb{R})$. a) Équilibre marginal. b) Équilibre instable.

(figure 3.5b). On dit que la stabilité de l'équilibre est "marginale" lorsqu'une ou plusieurs valeurs propres sont sur l'axe des imaginaires purs (figure 3.5a).

En variant les paramètres de contrôle d'un système, il se peut qu'une ou plusieurs valeurs propres traversent l'axe des imaginaires purs. Ainsi, un équilibre stable (toutes les valeurs propres de partie réelle négative) peut devenir instable (une ou plusieurs valeurs propres de partie réelle positive). Cette transition de l'état stable à un instable est appelée "bifurcation". En variant un seul paramètre, on peut observer une bifurcation "stationnaire" lorsqu'une valeur propre réelle et négative devient positive ou une bifurcation "oscillatoire" lorsqu'une paire de valeurs propres conjuguées (les coefficients du système sont supposés réels) traverse l'axe des imaginaires purs.

Lorsque \underline{A} n'est pas diagonalisable, on peut trouver une base qui la transforme en blocs de Jordan. À un bloc de Jordan de taille r associé à une valeur propre s correspond un comportement $A(t) = P_r(t) \exp(st)$ où P_r est un polynôme de degré $r-1$. On voit donc que c'est encore la partie réelle des valeurs propres qui contrôle la stabilité de l'équilibre avec, toutefois, un comportement particulier dans le cas "marginal" $\text{Re}(s) = 0$.

1.3 Exemple du pendule simple

On considère un pendule simple formé d'une masse m assimilée à un point et suspendue à un fil de masse négligeable et de longueur l . En l'absence de frottement, l'angle $u(t)$ que fait le pendule avec la verticale vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$\ddot{u} + \omega^2 \sin u = 0. \quad (3.9)$$

où $\omega = \sqrt{g/l}$ et g est la gravité. Cette équation ne fait pas intervenir la masse.

Le pendule simple est un cas particulier de la famille des équations différentielles s'écrivant sous la forme $\ddot{u} = -V'(u)$ où $V(u)$ est une fonction dérivable quelconque appelée potentiel. Il suffit en effet de poser $V(u) = \omega^2(1 - \cos u)$. Dans le cas d'un potentiel $V(u)$ quelconque, on peut ramener l'équation différentielle d'ordre deux en temps à un système dynamique d'ordre un en temps de la forme $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X})$ en posant $\underline{X} = {}^t(q, p)$ et en écrivant

$$\dot{q} = p \quad \text{et} \quad \dot{p} = -V'(q). \quad (3.10)$$

Il suffit en effet de poser $u(t) = q(t)$ et $\dot{u}(t) = p(t)$. L'espace des phases de

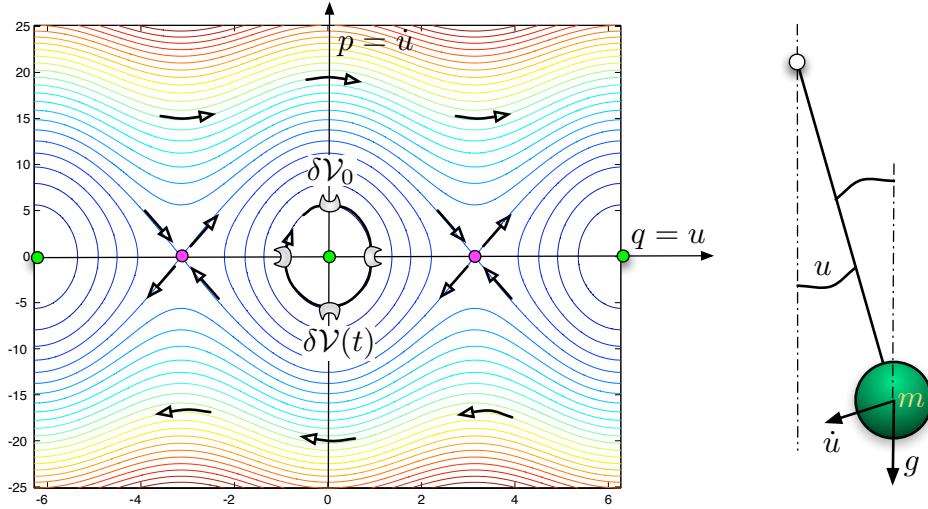


FIGURE 3.6 – a) Portrait de phase du pendule simple. b) Angle u et vitesse \dot{u} .

ce système est l'ensemble des $\underline{X} \in \mathbb{R}^2$ et l'espace de contrôle est constitué de l'ensemble des valeurs du paramètre $\omega^2 \in \mathbb{R}_+$.

Les équilibres sont des points $\underline{X}_e = (q_e, 0)$ tels que X_e est un extremum de la fonction V . La stabilité de ces équilibres est obtenue en calculant les valeurs propres de la matrice

$$\underline{DF}(\underline{X}_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(q_e) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

c'est-à-dire en recherchant les solutions de $s^2 + V''(q_e) = 0$. Si $V''(q_e) < 0$, la valeur q_e correspond à un maximum du potentiel V . Les valeurs propres sont alors $s = \pm \sqrt{-V''(q_e)}$ et l'équilibre est instable. Si $V''(q_e) > 0$, la valeur q_e correspond à un minimum du potentiel V . Les valeurs propres sont alors $s = \pm i\omega_e$ avec $\omega_e = \sqrt{V''(q_e)}$ et l'équilibre est marginal.

Pour le pendule simple, deux équilibres sont obtenus en résolvant $\underline{F}(\underline{X}_e) = \underline{0}$. Ces équilibres correspondent à la position basse $\underline{X}_b = (0, 0)$ et à la position haute $\underline{X}_h = (\pi, 0)$ du pendule. La stabilité de \underline{X}_h (instable) et de \underline{X}_b (marginale) est obtenue en calculant, respectivement, les valeurs propres des matrices jacobiennes

$$\underline{DF}(\underline{X}_h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{DF}(\underline{X}_b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

c'est-à-dire en résolvant, respectivement, les deux équations caractéristiques $s^2 - \omega^2 = 0$ et $s^2 + \omega^2 = 0$. Les valeurs propres sont donc, respectivement, $s^\pm = \pm \omega$ et $s^\pm = \pm i\omega$, auxquelles sont associés, respectivement, les vecteurs propres $\underline{\phi}^\pm = (1, \pm \omega)$ et $\underline{\phi}^\pm = (1, \pm i\omega)$.

Le tracé des trajectoires d'un système dépendant d'un potentiel s'obtient en remarquant que si $[q(t), p(t)]$ est une solution, la quantité $E(t) = \frac{1}{2}p(t)^2 + V[q(t)]$ ne varie pas dans le temps (il suffit de vérifier que $\dot{E} = 0$). Les trajectoires dans l'espace des phases $\underline{X} = (q, p) \in \mathbb{R}^2$ sont donc situées sur les courbes $H_0 = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$ obtenues pour toutes les valeurs de H_0 possibles (figure 3.7).

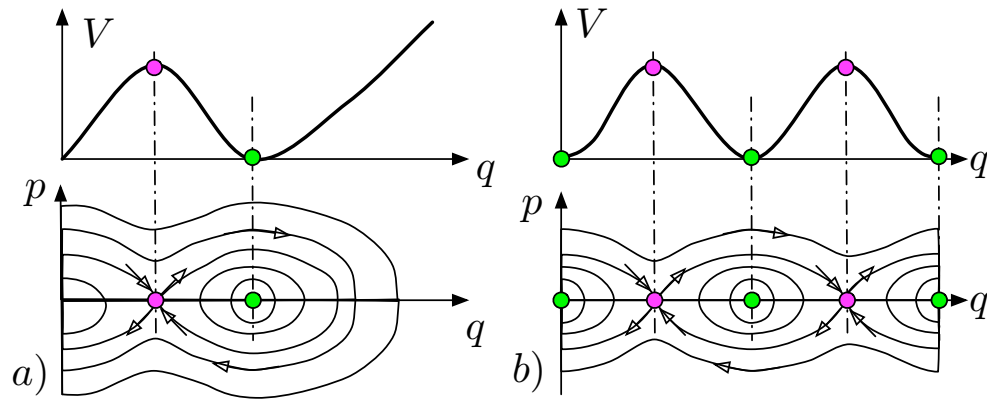


FIGURE 3.7 – Systèmes dépendant d'un potentiel $V(q)$ et trajectoires associées. a) Potentiel de forme quelconque. b) Potentiel du pendule simple.

2 Systèmes conservatifs ou dissipatifs

La traduction mathématique des notions de systèmes conservatifs ou dissipatifs est effectuée en calculant l'évolution d'un volume de conditions initiales dans l'espace des phases. Ces notions sont illustrées sur le cas des systèmes hamiltoniens (conservatifs) et de l'oscillateur de Van de Pol (dissipatif) qui subit une bifurcation oscillatoire (de Hopf).

2.1 Évolution du volume dans l'espace des phases

Étant donné le système dynamique $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X})$, on considère un ensemble de conditions initiales occupant un petit volume $\delta\mathcal{V}_0$ (une petite aire pour $n = 2$) autour de la condition initiale particulière \underline{X}_0 dans l'espace des phase \mathbb{R}^n (voir figures 3.4, 3.6 et 3.8). L'évolution de ce volume obéit à l'équation

$$\frac{1}{\delta\mathcal{V}(t)} \dot{\delta\mathcal{V}}(t) = \operatorname{div} \underline{F}[\underline{X}(t)] = \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_l}{\partial x_l}[\underline{X}(t)], \quad (3.13)$$

où $\underline{X}(t)$ est la trajectoire issue de la condition initiale $\underline{X}(0) = \underline{X}_0$ (figure 3.4).

On dit que le système dynamique est "conservatif" si $\operatorname{div} \underline{F} = 0$, c'est-à-dire si les volumes d'états de l'espace des phases sont invariants par le système dynamique. C'est le cas, par exemple, du pendule simple comme on peut le vérifier facilement.

On dit que le système dynamique est "dissipatif" si $\operatorname{div} \underline{F} \neq 0$ avec certaines régions de l'espace des phases où $\operatorname{div} \underline{F} < 0$. C'est le cas du pendule amorti pour lequel le frottement de l'air peut se modéliser par une force proportionnelle à la vitesse, conduisant au modèle

$$\ddot{u} + 2\kappa \dot{u} + \omega^2 \sin u = 0. \quad (3.14)$$

Le paramètre $\kappa > 0$ est un facteur d'amortissement du mouvement du pendule et l'on a $\operatorname{div} \underline{F} = -2\kappa$.

Les équilibres sont les mêmes que pour le pendule non amorti. Leur stabilité et le portrait de phase de leur voisinage (voir figure 3.8) s'obtiennent en linéarisant

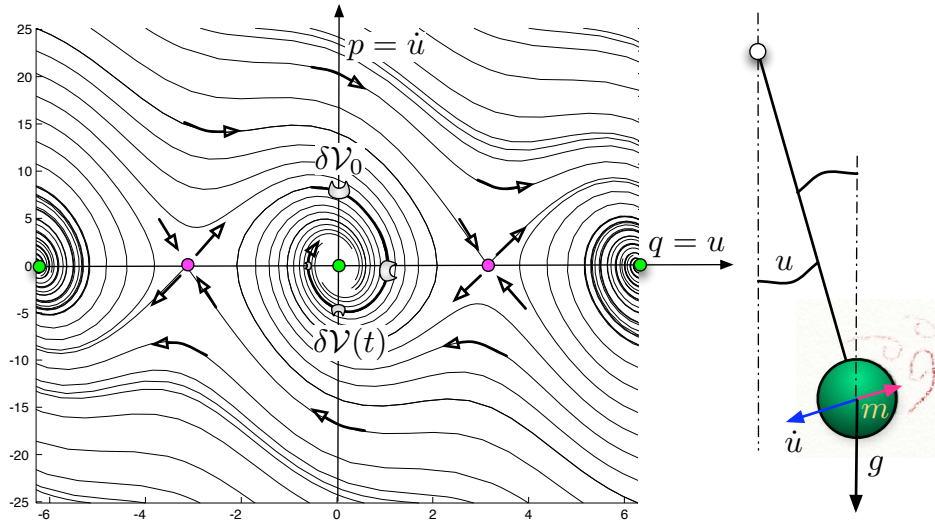


FIGURE 3.8 – a) Portrait de phase du pendule amorti. b) Force de frottement.

les équations autour de la position haute (instable) ou de la position basse (stable).

Les systèmes dissipatifs favorisent l'existence "d'attracteurs", c'est-à-dire d'ensemble de trajectoires dans l'espace des phases vers lesquelles convergent les autres trajectoires. C'est, pour le cas du pendule, l'équilibre stable qui correspond à une trajectoire réduite à un point. Il existe des attracteurs plus riches comme les cycles limites (trajectoires périodiques), les tores ou encore les attracteurs étranges.

2.2 Systèmes dynamiques hamiltoniens

Très souvent, les systèmes "conservatifs" intervenant en physique appartiennent à la famille des systèmes hamiltoniens qui s'écrivent

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \quad \text{et} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p), \quad (3.15)$$

où $H(q, p)$ est une fonction dérivable quelconque. En choisissant le Hamiltonien $H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$, on retrouve le cas des systèmes dépendant d'un potentiel. Mais on peut considérer d'autres formes de l'Hamiltonien $H(q, p)$ comme par exemple avec le choix $H = qp$ qui conduit au système $\dot{q} = p$ et $\dot{p} = -q$.

Étant donnée une solution $[q(t), p(t)]$, on montre que la quantité $E(t) = H[q(t), p(t)]$ est un invariant du mouvement. En effet,

$$\dot{E} = \dot{q} \frac{\partial H}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \quad (3.16)$$

On montre de plus que les aires sont conservées dans l'espace des phases. En effet, si on note $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X})$ avec $\underline{X} = {}^t(q, p)$ le système dynamique hamiltonien,

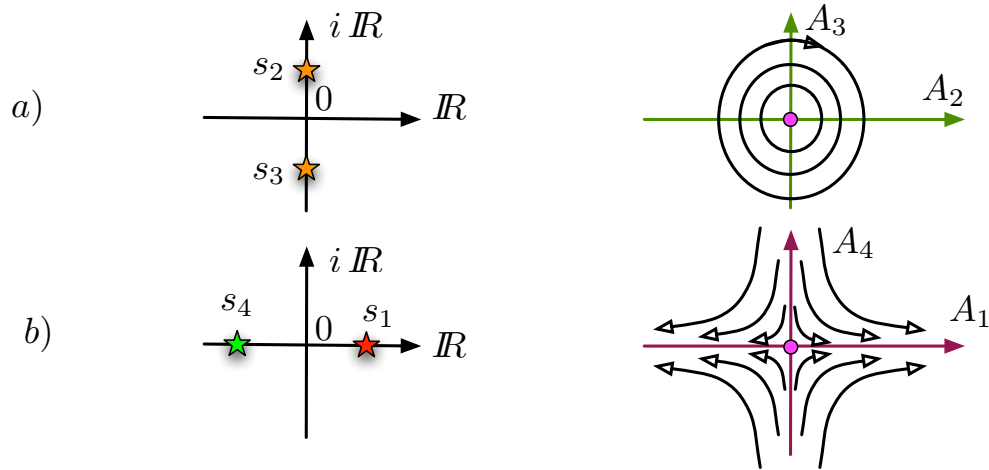


FIGURE 3.9 – Valeurs propres pour un système conservatif : a) imaginaires pures, b) réelles.

on peut calculer la divergence

$$\operatorname{div} \underline{F}(\underline{X}) = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0. \quad (3.17)$$

Cette propriété entraîne qu'un volume (ici une aire) de conditions initiales reste constant au cours du temps, comme dans le cas d'un écoulement isochore. On parle alors de systèmes conservatifs. Les attracteurs de ces systèmes ne peuvent pas être des équilibres dans la mesure où il faut contracter les volumes de l'espace des phases pour y converger.

L'invariance de l'hamiltonien H et des aires dans l'espace des phases se généralise au cas des systèmes hamiltoniens $H(\underline{q}, \underline{p})$ dans \mathbb{R}^{2n} dont l'expression générale est

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\underline{q}, \underline{p}) \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\underline{q}, \underline{p}) \quad (3.18)$$

pour $i = 1, \dots, n$ avec $\underline{q} \in \mathbb{R}^n$ et $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$.

La stabilité des équilibres des systèmes conservatifs est particulière. Dans la mesure où $\operatorname{div} \underline{F} = 0$, on doit avoir $\sum_{l=1}^n s_l = 0$. Dans les cas les plus courants (voir par exemple le cas du pendule simple), on peut avoir une paire de valeurs propres imaginaires pures opposées ou une paire de valeurs propres réelles opposées. Les trajectoires autour de l'équilibre sont alors, respectivement, des ellipses ou des hyperboles (voir figure 3.9).

2.3 L'oscillateur de Van der Pol

Une façon de forcer le pendule peut être obtenue en imposant une force proportionnelle à la vitesse et dans le même sens, au moins pour les petites oscillations. On peut imaginer une telle force sur un pendule en utilisant l'induction magnétique que provoque la masse ponctuelle lorsqu'elle est électriquement chargée. Les équations du pendule avec une dissipation négative pour les petites oscillations apparaissent naturellement dans un montage électronique portant le nom

d'oscillateur de Van der Pol. Ces équations s'écrivent

$$\ddot{u} + (\lambda u^2 - 2\mu) \dot{u} + \omega^2 \sin u = 0. \quad (3.19)$$

La stabilité de l'équilibre $u = 0$ s'obtient en étudiant la partie réelle des valeurs propres du système linéarisé qui s'écrivent $s = \mu \pm i\omega$. La position basse $u = 0$ est donc stable pour $\mu < 0$ (on retrouve la notion de dissipation en posant $\mu = -\kappa$) et instable pour $\mu > 0$. La valeur critique de la bifurcation est $\mu = 0$.

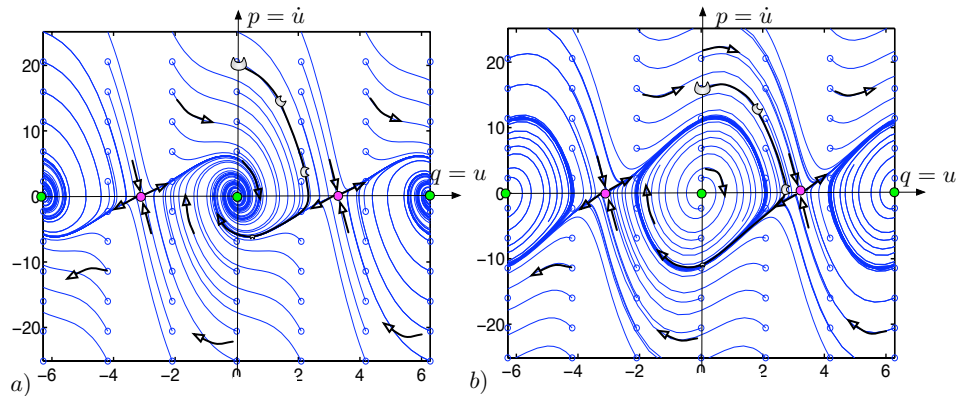


FIGURE 3.10 – Portrait de phase de l'oscillateur de Van der Pol pour $\lambda = 2$. a) Cas stable $\mu = -1$, b) cas instable $\mu = 1$.

On peut alors montrer (admis ici), à l'aide d'un développement asymptotique, que l'amplitude complexe $A(t) \in \mathcal{C}$ associée au mode instable vérifie, dans le voisinage de la bifurcation $\mu = 0$, l'équation

$$\dot{A} = (\mu + i\omega) A + (\alpha + i\beta) |A|^2 A \quad (3.20)$$

où $\alpha = \lambda/2$ et $\beta = 3/(2\omega)$. L'espace des phases de ce système dynamique, ramené en variables réelles est de dimension 2. Ce système, dans le cas de paramètres $(\mu, \omega, \alpha, \beta)$ quelconques, décrit une "bifurcation de Hopf".

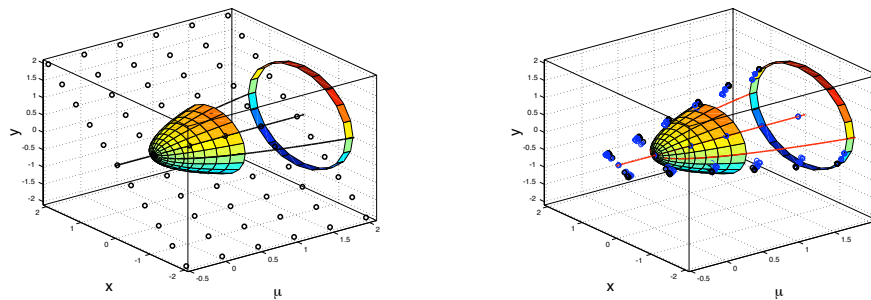


FIGURE 3.11 – Diagramme (μ, x) de la bifurcation de Hopf. a) Conditions initiales $[\mu, x(0)]$ réparties régulièrement. b) Positions des points $[\mu, x(t)]$ au cours du temps.

En posant $A(t) = \rho(t) \exp[i\theta(t)]$ avec $\rho(t) > 0$, le système s'écrit

$$\dot{\rho} = \mu \rho + \alpha \rho^3 \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \omega + \beta \rho^2. \quad (3.21)$$

On remarque que l'évolution du module $\rho(t)$ est découplée de celle de $\theta(t)$ et que son étude a déjà été réalisée lors de l'étude de la bifurcation fourche. L'évolution de la phase $\theta(t)$ dépend alors de celle de $\rho(t)$ de manière simple.

On peut alors tracer les diagrammes de bifurcation de la bifurcation de Hopf (figure 3.11) à la lumière des diagrammes de bifurcation de la bifurcation fourche. Ces nouveaux diagrammes peuvent être représentée dans l'espace tridimensionnel (μ, x, y) où x et y sont les parties réelles et imaginaires de A . Pour μ fixé, les trajectoires parcourent donc des courbes dans un espace de dimension 2 que l'on peut voir comme \mathbb{R}^2 ou \mathcal{C} .

3 Équations aux dérivées partielles

Pour étendre les notions d'instabilité aux cas des équations aux dérivées partielles, on présente ici des modèles basés sur des équations aux dérivées partielles unidimensionnelles (1D). Il est fait ici abstraction de l'éventuelle signification physique des solutions, bien qu'il serait possible d'explicitier des systèmes dont la dynamique se laisse décrire par ces modèles.

3.1 Modèle linéaire

On considère le modèle linéaire 1D suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \mu_0 u + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \quad (3.22)$$

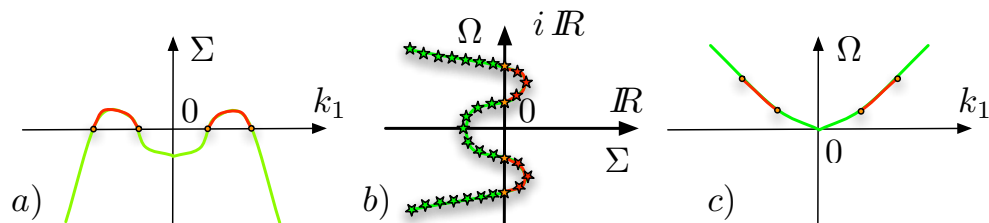


FIGURE 3.12 – Relation de dispersion généralisée : a) $\Sigma(k_1)$, b) $\Omega(k_1)$ et c) valeurs propres $s(k_1) = \Sigma(k_1) + i \Omega(k_1)$ dans \mathcal{C} .

En se plaçant dans le cadre d'un domaine infini, on cherche des solutions complexes de la forme

$$u(x, t) = u_m e^{i k_1 x + s t} = u_m e^{i k_1 x} e^{\sigma t - i \omega t} \quad (3.23)$$

avec $u_m \in \mathcal{C}$, $k_1 \in \mathbb{R}$ et $s = \sigma - i \omega \in \mathcal{C}$. La forme de ces solutions est justifiée par le fait que l'équation aux dérivées partielles considérée est invariante par translations d'espace et de temps.

On pourrait considérer des solutions plus générales de la forme $u(x, t) = a \exp(\gamma x + i k_1 x) \exp(\sigma t - i \omega t)$, pour prendre en compte une croissance spatiale, mais on se restreint ici au cas de la "stabilité temporelle" où les solutions sont bornées à l'infini. Dans la mesure où le modèle est linéaire, les solutions générales sont obtenues en sommant les solutions élémentaires considérées. En

particulier, les solutions réelles peuvent s'obtenir en prenant la partie réelle des solutions complexes. Pour pouvoir étendre les notations aux cas 2D ou 3D, on dit que k_1 est le "vecteur d'onde" et que sa norme (valeur absolue) $k = |k_1|$ est le "nombre d'onde".

En reportant la forme des solutions recherchées dans l'équation, on voit que l'on obtient des solutions non triviales ($u_m \neq 0$) à condition que les relations de dispersion généralisées suivantes soient vérifiées :

$$\sigma = \Sigma(k_1) = \mu_0 - \mu_2 k_1^2 + \mu_4 k_1^4 \quad \text{et} \quad \omega = \Omega(k_1) = \alpha_1 k_1 - \alpha_3 k_1^3. \quad (3.24)$$

Un autre point de vue consiste à écrire le modèle sous la forme $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u$, où $\mathcal{L} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ est l'opérateur différentiel qui contient les dérivées spatiales et P est le polynôme défini par $P(\xi) = \mu_0 - \alpha_1 \xi + \mu_2 \xi^2 - \alpha_3 \xi^3 + \mu_4 \xi^4$. Les fonctions $A e^{i k x}$ sont les "modes propres" de l'opérateur \mathcal{L} . On peut écrire

$$\mathcal{L} e^{i k_1 x} = P(i k_1) e^{i k_1 x} = [\Sigma(k_1) - i \Omega(k_1)] e^{i k_1 x}. \quad (3.25)$$

La deuxième relation de l'équation (3.24) (figure 3.13.b) est la relation de dispersion de l'équation de Korteweg de Vries linéaire que l'on obtient dans le cas où les coefficients μ_j du modèle sont nuls.

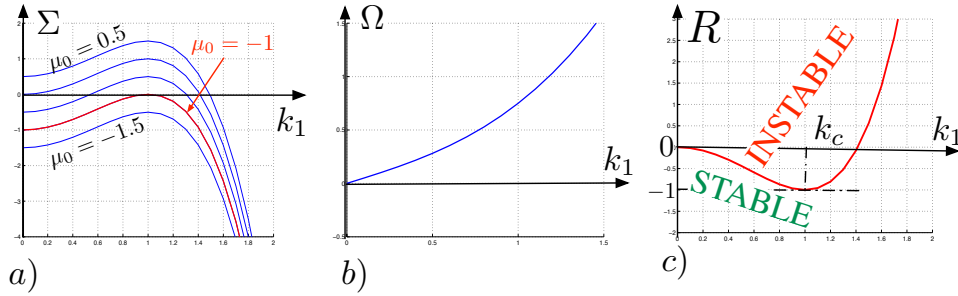


FIGURE 3.13 – Dispersion et stabilité du modèle linéaire 1D dans le cas $\alpha_1 = .5$, $\alpha_3 = -.25$, $\mu_2 = -2$ et $\mu_4 = -1$. a) Taux de croissance $\sigma = \Sigma(k_1)$ pour $\mu_0 \in \{-1.5, -1.0, -0.5, 0.0, 0.5\}$. b) Relation de dispersion $\omega = \Omega(k_1)$. c) Seuil d'instabilité $R_c = -1$ dans le plan (k_1, R) .

La première relation de l'équation (3.24) (figure 3.13.a) permet de déterminer si les solutions du modèle sont amplifiées ($\sigma > 0$) ou amorties ($\sigma < 0$). On voit que l'on doit supposer $\mu_4 \leq 0$ pour que les modes de grand nombre d'onde k (petites périodes spatiales) soient amortis. Dans le cas contraire, le modèle est non seulement "non physique", mais aussi mal posé sur le plan mathématique. Si $\mu_4 > 0$ et $\mu_2 < 0$, le maximum de $\Sigma(k_1)$ est atteint pour $k_1 = \sqrt{\frac{\mu_2}{2\mu_4}}$ et vaut $\mu_0 - \frac{\mu_2^2}{4\mu_4}$. On voit alors que lorsque le nombre sans dimension $R = \frac{4\mu_0\mu_4}{\mu_2^2}$ est inférieur à la valeur critique $R_c = -1$, tous les modes sont stables. Lorsque R est supérieur à cette valeur critique, les modes sont instables pour un intervalle fini de nombres d'ondes $|k_1|$, et le mode le plus instable correspond à la valeur critique $k_c = \sqrt{\frac{\mu_2}{2\mu_4}}$.

3.2 Linéarisation autour d'un équilibre

On considère le modèle non linéaire 1D suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu u + \alpha u^3 + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (3.26)$$

avec $u(x, t) \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$, $\mu_2 < 0$ et $\mu_4 < 0$. Pour $\mu > 0$, on remarque l'existence des deux solutions stationnaires symétriques $u_+ = u_0$ et $u_- = -u_0$ avec $u_0 = \sqrt{-\mu/\alpha}$. On s'intéresse à la stabilité temporelle des équilibre $u_+ = u_0$ au regard de petites perturbations. Pour cela, on pose

$$u(x, t) = u_0 + \tilde{u}(x, t) \quad (3.27)$$

et l'on s'intéresse à l'évolution des perturbations $\tilde{u}(x, t)$ que l'on peut choisir petites à un instant initial donné. En reportant dans l'équation du modèle on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = & (\mu + 3\alpha u_0^2) \tilde{u} + \mu_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4} \\ & + \alpha (3u_0 \tilde{u}^2 + \tilde{u}^3) . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Tant que la perturbation $\tilde{u}(x, t)$ reste petite, on peut négliger les termes "non linéaires" $\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ et $[3u_0 \tilde{u}^2 + \tilde{u}^3]$ devant les termes linéaires. En posant $\mu_0 = \mu + 3\alpha u_0^2 = -2\mu$, le système "linéarisé autour de l'équilibre u_0 " s'écrit donc

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \mu_0 \tilde{u} + \mu_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4} . \quad (3.29)$$

On retrouve le modèle linéaire étudié dans le paragraphe précédent à condition de poser $\alpha_1 = u_0$ et $\alpha_3 = 0$.

3.3 Calcul de stabilité dans le cas général

Pour généraliser le concept de stabilité temporelle d'un équilibre au cas 3D, on considère le modèle général

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \mathcal{F}(\underline{U}) \quad (3.30)$$

où $\underline{U}(\underline{x}, t) = {}^t(U_1, U_2, \dots, U_n) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur dans un espace de dimension n , $\underline{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur des coordonnées spatiales et \mathcal{F} est un opérateur non linéaire faisant intervenir les dérivées spatiales $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial}{\partial x_3}$ des composantes de \underline{U} .

On suppose que \underline{U}_e est un équilibre du modèle, c'est-à-dire qu'il vérifie $\mathcal{F}(\underline{U}_e) = \underline{0}$. On pose alors $\underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{U}_e + \tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t)$ et l'on suppose que $\tilde{\underline{U}}$ est une perturbation initialement petite. En reportant dans le modèle on obtient

$$\frac{\partial \tilde{\underline{U}}}{\partial t} = \underline{L} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \tilde{\underline{U}} + O \left(\|\tilde{\underline{U}}\|^2 \right) , \quad (3.31)$$

où $\underline{L}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est une matrice $n \times n$ dont les composantes $L_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ sont des polynômes et $O \left(\|\tilde{\underline{U}}\|^2 \right)$ est un terme négligeable tant que la perturbation est petite.

Si le modèle (3.30) est invariant par translation dans le temps et dans l'espace et que l'équilibre \underline{U}_e est constant, les coefficients des polynômes $L_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ de la matrice \underline{L} sont constants. On peut alors chercher des solutions du système linéarisé $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\underline{U}} = \underline{L} \tilde{\underline{U}}$ sous la forme

$$\tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t) = U_m \underline{\phi} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} + s t} \quad (3.32)$$

où U_m est une amplitude complexe constante, $\underline{\phi}$ un vecteur complexe constant et $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$ un vecteur de \mathbb{R}^3 appelé le "vecteur d'onde". On doit alors résoudre

$$s \underline{\phi} = \underline{L}(ik_1, ik_2, ik_3) \cdot \underline{\phi}. \quad (3.33)$$

Les solutions non nulles sont obtenues en choisissant s , \underline{k} et $\underline{\phi}(\underline{k})$ de telle sorte que $\underline{\phi}$ soit un vecteur propre de la matrice $\underline{L}(ik_1, ik_2, ik_3)$. Les valeurs propres sont alors de la forme $s = \Sigma(\underline{k}) - i \Omega(\underline{k})$ et on dit que la solution complexe correspondante $\underline{U}(\underline{x}, t) = U_m \underline{\phi}(\underline{k}) \exp[i \underline{k} \cdot \underline{x} + s(\underline{k}) t]$ avec U_m quelconque est un "mode propre".

Dans le cas où $\underline{L}(ik_1, ik_2, ik_3)$ est une matrice $(n \times n)$ diagonalisable, cette recherche de valeurs propres $s = \sigma - i\omega$ et vecteurs propres $\underline{\phi}$ conduit à n relations de dispersion généralisées de la forme

$$\sigma_l = \Sigma_l(\underline{k}) \quad \text{et} \quad \omega_l = \Omega_l(\underline{k}) \quad \text{pour } l = 1, \dots, n. \quad (3.34)$$

Les vecteurs propres $\underline{\phi}_l$ associés, solutions de $\underline{L} \underline{\phi}_l = s_l \underline{\phi}_l$ permettent de construire les solutions complexes sous la forme

$$\tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l=1}^n \hat{U}_l(\underline{k}) \underline{\phi}_l(\underline{k}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}} e^{\Sigma_l(\underline{k}) t - i \Omega_l(\underline{k}) t} dk_1 dk_2 dk_3. \quad (3.35)$$

On en déduit que si $\sigma_l = \Sigma_l(\underline{k})$ est négatif pour les $i = 1, \dots, n$ et tous les vecteurs d'ondes \underline{k} considérés, le système linéaire est stable et, par conséquent, l'équilibre \underline{U}_e autour duquel le modèle a été linéarisé. En revanche, il suffit qu'il existe une valeur propre s_l dont la partie réelle σ_l est positive pour une bande, même petite, de vecteurs d'ondes \underline{k} , pour que l'équilibre considéré soit instable.

Si le modèle (3.30) est invariant par translation dans le temps et dans toutes les directions d'espace sauf x_3 , on cherche alors des solutions sous la forme

$$\tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t) = \underline{\phi}(x_3) e^{i k_1 x_1 + i k_2 x_2 + s t} \quad (3.36)$$

où $\underline{\phi}(x_3)$ un vecteur complexe fonction de x_3 et $\underline{k} = (k_1, k_2)$ un vecteur de \mathbb{R}^2 . On doit alors résoudre alors

$$s \underline{\phi}(x_3) = \underline{L} \left(ik_1, ik_2, \frac{d}{dx_3} \right) \cdot \underline{\phi}(x_3). \quad (3.37)$$

Très souvent, le domaine est borné dans la direction x_3 et le modèle (3.30) est complété par des conditions aux limites. On se ramène donc à une équation différentielle ordinaire en x_3 linéaire avec conditions aux limites et l'on cherche les valeurs de s pour lesquelles il existe des solutions non triviales.

FORMULAIRE

Bifurcation fourche

Le système dynamique réel suivant décrit, de manière générique, l'instabilité stationnaire d'un équilibre par brisure d'une symétrie :

$$\dot{X} = F(X) = \mu X + \alpha X^3,$$

La stabilité des équilibres X_e , tels que $F(X_e) = 0$, est obtenue en examinant le signe de la dérivée de F : stable pour $F'(X_e) < 0$, instable sinon. La bifurcation fourche est supercritique pour $\alpha < 0$ et sous-critique pour $\alpha > 0$.

Bifurcations d'un équilibre stable

La stabilité des équilibres \underline{X}_e des systèmes dynamiques autonomes de la forme :

$$\underline{\dot{X}} = \underline{F}(\underline{X}) \iff \dot{X}_i = F_i(X_1, \dots, X_n) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

est obtenue en examinant les valeurs propres de la jacobienne $\underline{DF}(\underline{X}_e)$ de \underline{F} en \underline{X}_e . Si les parties réelles de toutes les valeurs propres sont négatives, l'équilibre est stable. Il est instable sinon, avec une bifurcation stationnaire si une valeur propre réelle devient positive, ou une bifurcation oscillatoire si une paire de valeurs propres complexes conjuguées traverse l'axe des imaginaires purs.

Système dynamique dérivant d'un potentiel

Les systèmes dérivant d'un potentiel V s'écrivent :

$$\ddot{u} + V'(u) = 0 \iff \begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -V'(q) \end{cases} \iff \underline{\dot{X}} = \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ -V'(X_1) \end{pmatrix}.$$

Les équilibres $\underline{X}_e = (q_e, 0)$ sont obtenus pour q_e extremum de $V(q)$ et sont stables si $V''(q_e) > 0$ (minimum du potentiel) ou instables sinon (maximum). La quantité $E(t) = \frac{1}{2} p(t)^2 + V[q(t)]$ ne varie pas dans le temps.

Systèmes dynamiques hamiltoniens

Les systèmes dynamiques hamiltoniens sont de la forme suivante, pour un choix quelconque d'une fonction dérivable $H(\underline{q}, \underline{p})$ avec $\underline{q} \in \mathbb{R}^n$ et $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\underline{q}, \underline{p}) \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\underline{q}, \underline{p}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Ils sont conservatifs car $\text{div } \underline{F}$, où \underline{F} est définie par $\underline{\dot{X}} = \underline{F}(\underline{X})$ avec $\underline{X} = (\underline{q}, \underline{p})$. La quantité $E(t) = H[\underline{q}(t), \underline{p}(t)]$ ne varie pas dans le temps. Les systèmes dérivant d'un potentiel sont hamiltoniens avec $H(\underline{q}, \underline{p}) = \frac{1}{2} p^2 + V(q)$.

Bifurcation de Hopf

Le système dynamique complexe suivant d'écrit, de manière générique, l'instabilité oscillatoire d'un équilibre :

$$\dot{A} = (\mu + i\omega) A + (\alpha + i\beta) |A|^2 A.$$

En posant $A(t) = \rho(t) \exp[i\theta(t)]$ avec $\rho(t) > 0$, on se ramène à une bifurcation fourche pour ρ .

Équations aux dérivées partielles

La stabilité de $u = 0$ pour le modèle linéaire, réel, à coefficients constants

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \mu_0 u + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$

s'obtient en cherchant des solutions de la forme $u(x, t) = a e^{ik_1 x + \sigma t - i\omega t}$. La relation de dispersion généralisée s'écrit alors :

$$\sigma = \Sigma(k_1) = \mu_0 - \mu_2 k_1^2 + \mu_4 k_1^4 \quad \text{et} \quad \omega = \Omega(k_1) = \alpha_1 k_1 - \alpha_3 k_1^3.$$

Calcul de stabilité dans le cas général

La stabilité d'un équilibre $U(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ pour un système d'équations aux dérivées partielles générale $\frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{F}(U)$ avec $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ (par exemple), s'obtient en résolvant le modèle linéarisé suivant pour les petites perturbation $\tilde{U}(\underline{x}, t)$:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \underline{L} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \tilde{U}$$

Si le modèle est invariant par translation dans le temps et dans l'espace, les coefficients des polynômes $L_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ dont est composée la matrice \underline{L} sont constants. On peut alors chercher des solutions complexes sous la forme $\tilde{U}(\underline{x}, t) = U_m \phi e^{i\mathbf{k}\cdot\underline{x} + s t}$. Le signe de la partie réelle des valeurs propres s détermine la stabilité de l'équilibre.

EXERCICES

EXERCICE 3.1 Bifurcations sous-critiques

On considère le système dynamique

$$\dot{X} = F(X) = \mu X + \alpha X^3 - \gamma X^5 \quad (3.38)$$

avec $X(t) \in \mathbb{R}$. On suppose $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$.

- 1) Discuter le nombre de racines positives du polynôme $P(Y) = \mu + \alpha Y - \gamma Y^2$ en fonction des valeurs de μ en notant $\mu_* = -\alpha^2/(4\gamma)$. Tracer la fonction $F(x)$ pour $\mu < \mu_*$, pour $\mu_* < \mu < 0$ puis pour $\mu > 0$.

Comme $P'(Y) = \alpha - 2\gamma Y$ et $P(Y)$ tend vers l'infini lorsque $|Y|$ tend vers l'infini, la fonction $P(Y)$ est minimal pour $Y_m = \frac{\alpha}{2\gamma}$ et vaut $P(Y_m) = \mu + \frac{\alpha^2}{4\gamma}$. Elle admet deux racines pour $\mu > \mu_*$, une pour $\mu = \mu_*$ et zéro sinon. Le tracé de la fonction $F(X)$ est représenté sur la figure 3.14.

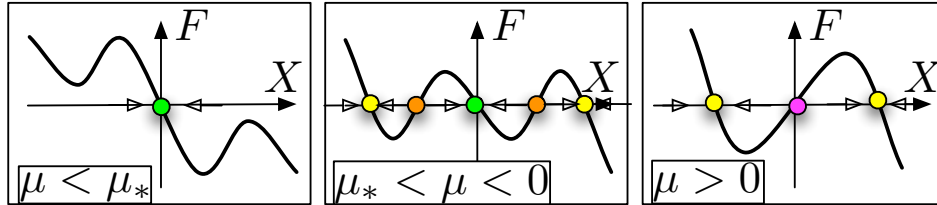


FIGURE 3.14 – Fonction $F(X)$ pour : $\mu < \mu_*$, pour $\mu_* < \mu < 0$ et pour $\mu > 0$.

- 2) Discuter le nombre d'équilibre et leur stabilité en utilisant les notations $X_{++} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2\gamma}}$, $X_+ = \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2\gamma}}$, $X_{--} = -X_{++}$ et $X_- = -X_+$ lorsqu'elles sont définies, avec $\Delta = \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma\mu}$.

$X = 0$ est toujours un équilibre. Il est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$. Pour $\mu < \mu_*$, $X = 0$ est le seul équilibre. Pour $\mu_* < \mu < 0$, les équilibres X_{++} et X_{--} sont stables et les équilibres X_+ et X_- sont instables.

- 3) Tracer le diagramme de bifurcation lorsque μ varie. Comme se nomme la bifurcation obtenue en $\mu = 0$? Est-elle sous-critique ou supercritique?

Le tracé du diagramme de bifurcation est représenté sur la figure 3.15a. On observe une bifurcation fourche sous-critique pour $\mu = 0$. Les bifurcations pour $\mu = \mu_*$ sont appelées "noeud-col".

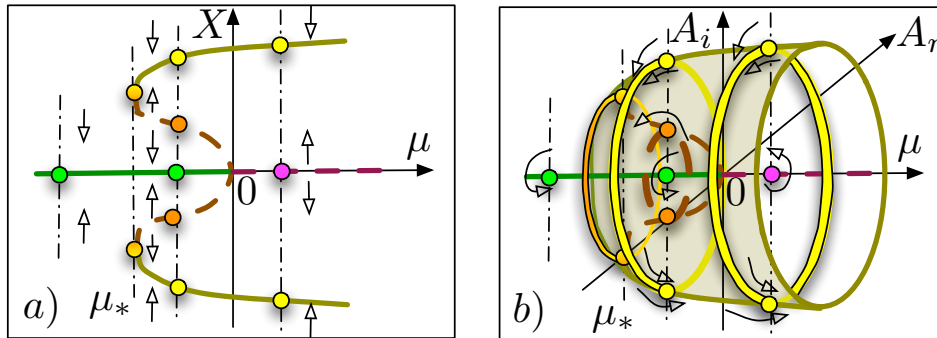


FIGURE 3.15 – Diagramme de bifurcation. a) système réel, b) système complexe.

On considère maintenant le système dynamique

$$\dot{A} = (\mu + i\omega) A + (\alpha + i\beta) |A|^2 A - (\gamma + i\delta) |A|^4 A, \quad (3.39)$$

avec $A(t) \in \mathcal{C}$. On suppose $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$.

- 4) En posant $A(t) = \rho(t) \exp[i\theta(t)]$, écrire le système dynamique en coordonnées polaires. En déduire le tracé du diagramme de bifurcation. Comme se nomme la bifurcation en $\mu = 0$?

On obtient $\dot{\rho} = \mu \rho + \alpha \rho^3 - \gamma \rho^5$ et $\dot{\theta} = \omega + \beta \rho^2 - \delta \rho^4$. On retrouve le système dynamique précédemment étudiant en remplaçant X par ρ . Le tracé du diagramme de bifurcation est représenté sur la figure 3.15b. On observe une bifurcation de Hopf sous-critique pour $\mu = 0$.

EXERCICE 3.2 Équation aux dérivées partielles 1D

On considère l'équation aux dérivées partielles unidimensionnelle (1D) suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu u - u^3 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (3.40)$$

avec $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $u(x, t) \in \mathbb{R}$ et μ un paramètre de contrôle réel.

1) Déterminer la stabilité de l'équilibre $u = 0$ en fonction de μ .

Si u est petit, on peut négliger les termes $u \frac{\partial u}{\partial x}$ et u^3 dans les équations. La recherche de solutions complexe de la forme $u = u_m \exp(i k_1 x + s t)$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$ et $s = \sigma - i \omega$ conduit aux relations de dispersion $\sigma = \Sigma(k_1) = \mu + k_1^2 - k_1^4$ et $\omega = \Omega(k_1) = 0$. Le maximum de $\Sigma(k_1)$ est atteint pour $k_1^2 = 1/2$ et vaut $\mu + 1/4$. Par conséquent, l'équilibre $u = 0$ est stable pour $\mu < -1/4$ et instable sinon.

2) Déterminer la stabilité de l'équilibre $u_0 = \sqrt{\mu}$ en fonction de $\mu \geq 0$.

On pose $u = u_0 + \tilde{u}$ et on néglige les termes d'ordre deux ou trois dans les équations qui s'écrivent alors $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = -2\mu \tilde{u} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4}$. On obtient alors les relations de dispersion $\sigma = \Sigma(k_1) = -2\mu + k_1^2 - k_1^4$ et $\omega = \Omega(k_1) = u_0 k_1$. Le maximum de $\Sigma(k_1)$ est atteint pour $k_1^2 = 1/2$ et vaut $-2\mu + 1/4$. Par conséquent, l'équilibre $u = u_0$ est instable pour $0 < \mu < 1/8$ et stable pour $\mu > 1/8$.

Chapitre 4

Exercices complémentaires

Sommaire

1	Exercice sur le chapitre 1	58
	Milieu très profond	59
	Cisaillement de deux couches infinies	61
	Tension superficielle et vagues	64
	Stabilité de l'écoulement de Poiseuille	66
2	Exercice sur le chapitre 2	66
	Rouleaux et relation de dispersion	67
	Milieu poreux en rotation	69
	Convection thermohaline	71
3	Exercice sur le chapitre 3	71
	Bifurcation noeud-col	72
	Bifurcation fourche imparfaite	72
	Bifurcation avec hysteresis	73
	Système dynamique et polynôme de degré trois	74
	Équations de Saint-Venant	76

1 Exercice sur le chapitre 1

EXERCICE 4.1 Milieu très profond

On considère une couche fluide infiniment profonde dont la surface libre, d'équation $z = \eta(x, t)$, est en contact avec l'atmosphère de pression constante p_a . On suppose que le mouvement du fluide est décrit par les équations d'Euler incompressibles 2D

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - g \underline{e}_z, \quad (4.1)$$

où ρ est la masse volumique, $\underline{U}(x, z, t) = u \underline{e}_x + w \underline{e}_z$ est le champ de vitesse et $p(x, z, t)$ est le champ de pression.

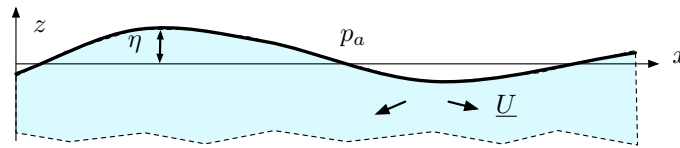


FIGURE 4.1 – Couche infiniment profonde à surface libre d'équation $z = \eta(x, t)$.

- 1) Interpréter les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w$ et $p = p_a$ en $z = \eta(x, t)$ et $\lim_{z \rightarrow -\infty} w = 0$.

La condition aux limites cinématique de surface énonce que la vitesse normale à la surface libre, d'équation $F(x, z, t) = z - \eta(x, t) = 0$, est égale à la vitesse normale de cette surface. Cette condition s'écrit $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} F = 0$ ou encore $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w$. La condition aux limites dynamique exprime l'égalité des forces de contacts qui sont des forces de pression. La condition cinématique $w = 0$ sur un fond plat est ici reportée à l'infini $z \rightarrow -\infty$.

- 2) Indiquer les étapes qui permettent de modéliser les petites oscillations irrotationnelles de la surface libre à l'aide du système d'équations $\operatorname{grad} \phi$, $\Delta \phi = 0$ et $p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ avec les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \eta$ en $z = 0$ et $\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$.

L'hypothèse irrotationnelle permet d'écrire le champ de vitesse sous la forme $\underline{U} = \operatorname{grad} \phi$ où $\phi(x, z, t)$ est le potentiel des vitesses. La condition $\operatorname{div} \underline{U} = 0$ s'écrit alors $\Delta \phi = 0$. L'équation de quantité de mouvement linéarisée $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - g \underline{e}_z$ s'intègre en $\frac{\partial \phi}{\partial t} + p/\rho + g z = p_a/\rho$, la constante d'intégration p_a/ρ pouvant être choisie ainsi dans la mesure où ϕ est défini à une constante $C(t)$ près. En développant les valeurs $f[x, \eta(x, t), t] = f(x, 0, t)[1 + O(\eta)]$ des champs en surface pour les petites oscillations, on peut appliquer les conditions aux limites en $z = 0$ plutôt qu'en $z = \eta(x, t)$. On linéarise alors ces conditions aux limites en utilisant $w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ et $p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p_a - \rho g z$.

- 3) Justifier la recherche de solutions de la forme $\phi = \Phi(z) e^{i k_x x - i \omega t}$ et $\eta = \eta_m e^{i k_x x - i \omega t}$ où $\Phi(z)$ et η_m sont complexes. Montrer que $\Phi(z) = \Phi_m \exp(k z)$ où $k = |k_x|$.

Les équations étant linéaires à coefficients réels, la partie réelle d'une solution complexe est aussi solution. Comme les coefficients sont constants, les solutions sont des exponentielles. On vérifie a posteriori que le taux de croissance temporel de ces ondes est nul. En reportant dans l'équation $\Delta \phi = 0$, on obtient $\Phi''(z) + k^2 \Phi(z) = 0$. En utilisant la condition aux limites en $-\infty$, on voit que $\Phi(z) = \Phi_m \exp(k z)$ où Φ_m est une amplitude complexe arbitraire.

- 4) En déduire la relation de dispersion $\omega = \pm \sqrt{g k}$ des ondes de surfaces en eaux profondes. Montrer que l'on peut choisir η_m réel sans perte de

généralité et exprimer la solution réelle sous la forme $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t)$ et $\phi = \frac{g\eta_m}{\omega} e^{kz} \sin(k_x x - \omega t)$. Montrer que les trajectoires de ces petites oscillations sont des cercles de centres (x_0, z_0) et de rayon $a(z_0)$ que l'on calculera. Quel est l'ordre de grandeur de la profondeur au-dessous de laquelle une houle de longueur d'onde L_x devient négligeable ?

Les conditions aux limites s'écrivent $-i\omega\eta_m = k\Phi_m$ et $-i\omega\Phi_m = -g\eta_m$. On en déduit que $\omega^2 = gk$ et $\Phi_m = -ig\eta_m/\omega$. On peut se ramener à η_m réel en changeant l'origine des x ou des t . La partie réelle de la solution complexe est alors de la forme indiquée. Comme $u = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ et $w = \frac{\partial\phi}{\partial z}$, la trajectoire de centre (x_0, y_0) est décrite par $x(x_0, z_0; t) = x_0 - a \sin(k_x x - \omega t)$ et $z(x_0, z_0; t) = z_0 + a \cos(k_x x - \omega t)$ où $a(z_0) = \eta_m \exp(kz_0)/\omega$ est le rayon du cercle. À la profondeur L_x , l'amplitude du mouvement a diminué d'un facteur $\exp(-2\pi) \sim 2 \cdot 10^{-3}$.

EXERCICE 4.2 Cisaillement de deux couches infinies

On considère la superposition de deux couches fluides incompressibles de masses volumiques respectives ρ_1 et ρ_2 avec $\rho_1 \geq \rho_2$. À l'équilibre, la couche la

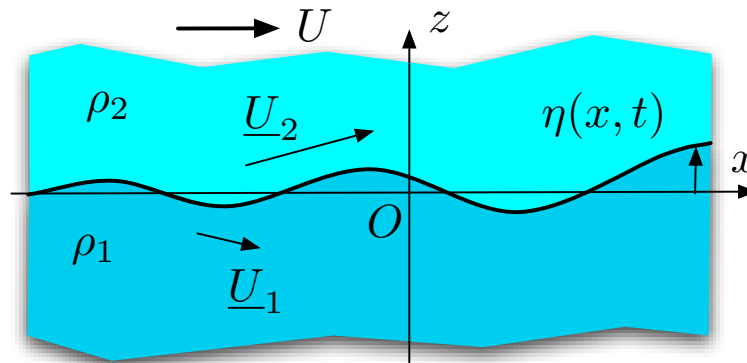


FIGURE 4.2 – Cisaillement de deux couches infinies avec la vitesse $U \underline{e}_x$.

plus lourde est au repos et occupe le demi-espace $z \leq 0$, tandis que la couche la plus légère est animée d'une vitesse constante $U \underline{e}_x$ dans le demi-espace $z \geq 0$ (Figure 4.2). On s'intéresse aux petites perturbations modélisées par les équations d'Euler 2D :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U}_2 = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_2}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_2 = -\frac{1}{\rho_2} \operatorname{grad} p_2 - g \underline{e}_z, \\ \operatorname{div} \underline{U}_1 = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_1 = -\frac{1}{\rho_1} \operatorname{grad} p_1 - g \underline{e}_z, \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $\underline{x} = x \underline{e}_x + z \underline{e}_z$ est le vecteur des coordonnées, $\underline{U}_1(\underline{x}, t) = u_1 \underline{e}_x + w_1 \underline{e}_z$ et $\underline{U}_2(\underline{x}, t) = u_2 \underline{e}_x + w_2 \underline{e}_z$ sont les champs de vitesses respectifs des deux couches et $p_1(\underline{x}, t)$ et $p_2(\underline{x}, t)$ leurs champs de pression. Le vecteur unitaire \underline{e}_z est vertical et g est l'intensité de la gravité.

- 1) D'où proviennent les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_1$, $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_2$ et $p_1 = p_2$ en $z = \eta(x, t)$? Quelles sont les conditions aux limites en $z = \pm\infty$?
- 2) Indiquer brièvement les étapes qui permettent de modéliser les petites oscillations irrotationnelles de la surface libre à l'aide du système d'équations $\underline{U}_1 = \operatorname{grad} \phi_1$, $\Delta \phi_1 = 0$, $\underline{U}_2 = \operatorname{grad} (Ux + \phi_2)$, $\Delta \phi_2 = 0$,

- $p_1 = p_{r1} - \rho_1 g z - \rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t}$, $p_2 = p_{r2} - \rho_2 g z - \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)$. Comparer les constantes d'intégration p_{r1} et p_{r2} entre elles en considérant l'équilibre.
- 3) Justifier les conditions aux limites en $z = 0$ suivantes :
- $$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g \eta \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g \eta \right), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}.$$
- 4) Justifier la recherche de solutions de la forme $\phi_1 = \Phi_1(z) e^{i k_x x + s t}$, $\phi_2 = \Phi_2(z) e^{i k_x x + s t}$ et $\eta = \eta_m e^{i k_x x + s t}$ où $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ et η_m sont complexes ainsi que $s = \sigma - i \omega$. Montrer que l'on peut écrire $\Phi_1(z) = \Phi_{1m} F_1(k z)$ et $\Phi_2(z) = \Phi_{2m} F_2(k z)$ avec $k = |k_x|$ où F_1 et F_2 sont deux fonctions que l'on explicitera.
- 5) En déduire la relation de dispersion généralisée s'écrit $\rho_1 [\gamma + s^2] = \rho_2 [\gamma - (s + i k_x U)^2]$ où γ est une constante que l'on déterminera.
- 6) En déduire que les racines sont de la forme

$$s = \beta \left[-i \rho_2 k_x U \pm \sqrt{\rho_1 \rho_2 k^2 U^2 - (\rho_1^2 - \rho_2^2) g k} \right]$$

où β est une constante que l'on déterminera.

- 7) Exprimer le taux de croissance σ pour une perturbation de longueur d'onde L_x lorsqu'elle conduit à une instabilité.
- 8) On suppose que $\rho_2 = 1040 \text{ kg/m}^3$ est la salinité de la Mer Rouge dont une couche de vitesse $U = 1 \text{ m/s}$ est mise en contact avec une couche dont la salinité $\rho_1 = 1440 \text{ kg/m}^3$ est celle de la Mer Morte. Estimez la taille caractéristique L_c des plus gros tourbillons que l'on voit se former lorsque les deux couches fluides se rencontrent. Calculez leur vitesse de propagation. On donne $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- 9) On suppose que l'on observe, en plus des tourbillons de taille $L \leq L_c$, des structures d'extension horizontale plus grande que L_c . Quelle peut être la nature de ces structures ? À quelles vitesses se propagent-elles ?

Corrigé 4.2 Cisaillement de deux couches infinies

1) Les conditions aux limites cinématiques de surface énoncent que la vitesse normale à la surface libre, d'équation $F(x, z, t) = z - \eta(x, t) = 0$, est égale à la vitesse normale de cette surface. Cette condition s'écrit $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} F = 0$ ou encore $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_1$ pour le fluide du bas et $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_2$ pour le fluide du haut. La condition aux limites dynamique exprime l'égalité des forces de contacts qui sont des forces de pression. On a donc $p_1 = p_2$. La condition cinématique $w = 0$ sur un plan est ici reportée à l'infini. Elle s'écrit $w_1 = 0$ pour $z \rightarrow -\infty$. et $w_2 = 0$ pour $z \rightarrow \infty$.

2) L'hypothèse irrotationnelle permet d'écrire le champ de vitesse de la couche du bas sous la forme $\underline{U}_1 = \underline{\text{grad}} \phi_1$ où $\phi_1(x, z, t)$ est le potentiel des vitesses. La condition $\text{div} \underline{U}_1 = 0$ s'écrit alors $\Delta \phi_1 = 0$. Pour la couche du haut, on peut choisir $\underline{U}_2 = \underline{\text{grad}} (U x + \phi_2)$ de sorte que $\phi_2(x, z, t)$ soit le potentiel des écarts de vitesse au champ constant $U \underline{e}_x$. L'équation de quantité de mouvement linéarisée $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p - g \underline{e}_z$ s'intègre, pour la couche du bas, en $\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + p_1 + \rho_1 g z = p_{r1}$, la constante d'intégration p_{r1} pouvant être choisie de manière arbitraire dans la mesure où ϕ_1 est défini à une constante $C_1(t)$ près. Pour la couche du haut, on obtient de même $\rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) + p_2 + \rho_2 g z = p_{r2}$.

À l'équilibre, lorsque $\phi_1 = \phi_2$, la continuité du champ de pression impose $p_{r1} = p_{r2}$.

3) En développant les valeurs $f[x, \eta(x, t), t] = f(x, 0, t)[1 + O(\eta)]$ des champs en surface pour les petites oscillations, on peut appliquer les conditions aux limites en $z = 0$ plutôt qu'en $z = \eta(x, t)$. On linéarise alors les conditions aux limites cinématique à l'interface en utilisant $w_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}$ et $w_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}$. On écrit ensuite la condition aux limites dynamique $p_1 = p_2$ en $z = 0$ en ne négligeant pas η devant ϕ_1 et ϕ_2 .

4) Les équations étant linéaires à coefficients réels, la partie réelle d'une solution complexe est aussi solution. Comme les coefficients sont constants, les solutions sont des exponentielles. En reportant dans les équations $\Delta \phi_1 = 0$ et $\Delta \phi_2 = 0$, on obtient $\Phi_1''(z) - k^2 \Phi_1(z) = 0$ et $\Phi_2''(z) - k^2 \Phi_2(z) = 0$. En utilisant les conditions aux limites à l'infini, on voit que $\Phi_1(z) = \Phi_{1m} \exp(kz)$ et $\Phi_2(z) = \Phi_{2m} \exp(-kz)$ où Φ_{1m} et Φ_{2m} sont des amplitudes complexes arbitraires. On a donc $F_1(Z) = e^Z$ et $F_2(Z) = e^{-Z}$.

5) En utilisant $\Phi_1'(0) = k \Phi_{1m}$ et $\Phi_2'(0) = -k \Phi_{2m}$, les conditions aux limites cinématiques en $z = 0$ s'écrivent $s \eta_m = k \Phi_{1m}$ et $(s + i k_x U) \eta_m = -k \Phi_{2m}$. La condition aux limites dynamique s'écrit $\rho_1 [g k \eta_m + s \Phi_{1m}] = \rho_2 [g k \eta_m + (s + i k_x U) \Phi_{1m}]$. En éliminant Φ_{1m} et Φ_{2m} et en écartant la solution triviale $\eta_m = 0$, on en déduit $\rho_1 [g k + s^2] = \rho_2 [g k - (s + i k_x U)^2]$. On a donc $\gamma = g k$.

6) Le discriminant réduit de l'équation $(\rho_1 + \rho_2) s^2 + 2 i \rho_2 k_x U s + (\rho_1 - \rho_2) g k - \rho_2 k^2 U = 0$ s'écrit $\Delta' = -\rho_2 k^2 U^2 - (\rho_1^2 - \rho_2^2) g k + \rho_2 (\rho_1 + \rho_2) k^2 U = \rho_1 \rho_2 k^2 U - (\rho_1^2 - \rho_2^2) g k$. Les racines ont bien la forme indiquée avec $\beta = 1/(\rho_1 + \rho_2)$.

7) Le taux de croissance s'écrit $\sigma = \sqrt{\rho_1 \rho_2 k^2 U^2 - (\rho_1^2 - \rho_2^2) g k} / (\rho_1 + \rho_2)$ avec $k = 2\pi/L_x$.

8) Seules les perturbations de longueur d'onde $L \leq L_c$ avec $L_c = \frac{2\pi}{g} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} U^2 \sim 0,95$ m sont instables. Les plus gros tourbillons, de taille voisine de L_c , se propagent à la vitesse de phase $c_\varphi = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} U \sim 0,4$ m/s.

9) Les structures de tailles $L \geq L_c$ sont des ondes de gravité de vitesse de phase $c_\varphi = \beta \left[-\rho_2 U \pm \sqrt{-\rho_1 \rho_2 U^2 + (\rho_1^2 - \rho_2^2) g/k} \right]$. Il faudrait également calculer la vitesse de groupe pour rendre compte de l'observation de la propagation de paquets d'ondes.

EXERCICE 4.3 Tension superficielle et vagues

Si R est le rayon de courbure de l'interface $z = \eta(x, t)$ délimitant deux fluides non miscibles, la tension superficielle induit une différence de pression $p_2 - p_1 = T/R$ où T est une constante, $p_2 = p|_{z=\eta^+}$ et $p_1 = p|_{z=\eta^-}$ (figure 4.3). Lorsque η est petit, cette condition s'écrit

$$p_2 - p_1 = T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad \text{en } z = \eta(x, t). \quad (4.3)$$

On suppose ici que le deux fluides sont incompressible de masses volumiques

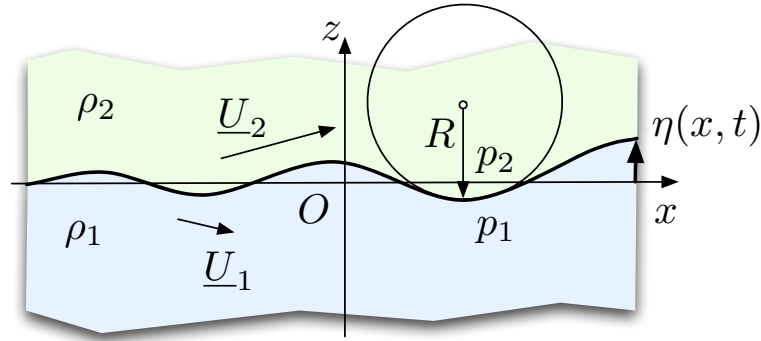


FIGURE 4.3 – Interface de deux couches infinies en prenant en compte la tension superficielle.

respectives ρ_1 et ρ_2 avec $\rho_1 \geq \rho_2$. À l'équilibre, la couche la plus lourde est au repos et occupe le demi-espace $z \leq 0$. On s'intéresse aux petites perturbations modélisées par les équations d'Euler 2D :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U}_2 = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_2}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_2 = -\frac{1}{\rho_2} \operatorname{grad} p_2 - g \underline{e}_z, \\ \operatorname{div} \underline{U}_1 = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_1 = -\frac{1}{\rho_1} \operatorname{grad} p_1 - g \underline{e}_z, \end{aligned} \quad (4.4)$$

où $\underline{x} = x \underline{e}_x + z \underline{e}_z$ est le vecteur des coordonnées, $\underline{U}_1(\underline{x}, t) = u_1 \underline{e}_x + w_1 \underline{e}_z$ et $\underline{U}_2(\underline{x}, t) = u_2 \underline{e}_x + w_2 \underline{e}_z$ sont les champs de vitesses respectifs des deux couches et $p_1(\underline{x}, t)$ et $p_2(\underline{x}, t)$ leurs champs de pression. Le vecteur unitaire \underline{e}_z est vertical et g est l'intensité de la gravité.

- 1) D'où proviennent les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_1$, $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_2$ et $p_1 = p_2 - T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ en $z = \eta(x, t)$? Justifier les conditions aux limites $w_1 = 0$ en $z = -\infty$ et $w_2 = 0$ en $z = \infty$.
- 2) Indiquer brièvement les étapes qui permettent de modéliser les petites oscillations irrotationnelles de la surface libre à l'aide du système d'équations $\underline{U}_1 = \operatorname{grad} \phi_1$, $\Delta \phi_1 = 0$, $\underline{U}_2 = \operatorname{grad} \phi_2$, $\Delta \phi_2 = 0$, $p_1 = p_{r1} - \rho_1 g z - \rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t}$, $p_2 = p_{r2} - \rho_2 g z - \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t}$. Comparer les constantes d'intégration p_{r1} et p_{r2} entre elles.
- 3) Justifier les conditions aux limites $\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g \eta \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + g \eta \right) + T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}$ en $z = 0$.
- 4) Justifier la recherche de solutions de la forme $\phi_1 = \Phi_1(z) e^{i k_x x + s t}$, $\phi_2 = \Phi_2(z) e^{i k_x x + s t}$ et $\eta = \eta_m e^{i k_x x + s t}$ où $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ et η_m sont complexes. Montrer que l'on peut écrire $\Phi_1(z) = \Phi_{1m} F_1(k z)$ et $\Phi_2(z) = \Phi_{2m} F_2(k z)$ avec $k = |k_x|$ où F_1 et F_2 sont deux fonctions que l'on explicitera.
- 5) En déduire la relation de dispersion s'écrit $\rho_1 (\gamma + s^2) = \rho_2 (\gamma - s^2) - T k^3$ où γ est une constante que l'on déterminera.
- 6) En déduire que les racines sont de la forme $s = \pm i \omega$ avec

$$\omega = \sqrt{\tilde{g}(k) k \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}}$$

où $\tilde{g}(k)$ est une fonction de k que l'on exprimera.

- 7) Exprimer la relation de dispersion des ondes de surface dans le cas $\rho_1 \gg \rho_2$.

- 8) Lorsque la couche supérieure est animée d'une vitesse moyenne U_2 , la relation de dispersion dans le cas $T = 0$ (pas de tension superficielle) est

$$\rho_1 \left[g k + \frac{s^2}{\tanh(k h_r)} \right] = \rho_2 [g k - (s + i k_x U_2)^2] .$$

Comment cette relation se généralise-t-elle au cas $T \neq 0$ (prise en compte de la tension superficielle).

- 9) Dans le cas de l'interface air-eau, on mesure $T = 7 \cdot 10^{-2}$ N/m. En déduire l'ordre de grandeur des longueurs d'onde à partir desquelles on peut négliger la tension superficielle. On pourra prendre $\rho_1 = 1000$ kg/m³ et $g = 10$ m/s².

Corrigé 4.3 Tension superficielle et vagues

1) Les conditions aux limites cinématiques de surface énoncent que la vitesse normale à la surface libre, d'équation $F(x, z, t) = z - \eta(x, t) = 0$, est égale à la vitesse normale de cette surface. Cette condition s'écrit $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } F = 0$ ou encore $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_1$ pour le fluide du bas et $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_2$ pour le fluide du haut. La condition aux limites dynamique exprime le saut de pression dû à la tension superficielle. La condition cinématique $w = 0$ sur un plan est ici reportée à l'infini. Elle s'écrit $w_1 = 0$ pour $z \rightarrow -\infty$. et $w_2 = 0$ pour $z \rightarrow \infty$.

2) L'hypothèse irrotationnelle permet d'écrire le champ de vitesse de la couche du bas sous la forme $\underline{U}_1 = \text{grad } \phi_1$ où $\phi_1(x, z, t)$ est le potentiel des vitesses. La condition $\text{div } \underline{U}_1 = 0$ s'écrit alors $\Delta \phi_1 = 0$. Pour la couche du haut, on a de même $\underline{U}_2 = \text{grad } \phi_2$. L'équation de quantité de mouvement linéarisée $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \underline{e}_z$ s'intègre, pour la couche du bas, en $\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + p_1 + \rho_1 g z = p_{r1}$, la constante d'intégration p_{r1} pouvant être choisie de manière arbitraire dans la mesure où ϕ_1 est défini à une constante $C_1(t)$ près. Pour la couche du haut, on obtient de même $\rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + p_2 + \rho_2 g z = p_{r2}$. À l'équilibre, lorsque $\phi_1 = \phi_2$, le champ de pression est continu (car $\eta = 0$) et l'on a donc $p_{r1} = p_{r2}$.

3) En développant les valeurs $f[x, \eta(x, t), t] = f(x, 0, t)[1 + O(\eta)]$ des champs en surface pour les petites oscillations, on peut appliquer les conditions aux limites en $z = 0$ plutôt qu'en $z = \eta(x, t)$. On linéarise alors les conditions aux limites cinématiques à l'interface en utilisant $w_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}$ et $w_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}$. On écrit ensuite la condition aux limites dynamique $p_1 = p_2$ en $z = 0$ en ne négligeant pas η devant ϕ_1 et ϕ_2 .

4) Les équations étant linéaires à coefficients réels, la partie réelle d'une solution complexe est aussi solution. Comme les coefficients sont constants, les solutions sont des exponentielles. En reportant dans les équations $\Delta \phi_1 = 0$ et $\Delta \phi_2 = 0$, on obtient $\Phi_1''(z) - k^2 \Phi_1(z) = 0$ et $\Phi_2''(z) - k^2 \Phi_2(z) = 0$. En utilisant les conditions aux limites à l'infini, on voit que $\Phi_1(z) = \Phi_{1m} \exp(kz)$ et $\Phi_2(z) = \Phi_{2m} \exp(-kz)$ où Φ_{1m} et Φ_{2m} sont des amplitudes complexes arbitraires. On a donc $F_1(Z) = e^Z$ et $F_2(Z) = e^{-Z}$.

5) En utilisant $\Phi_1'(0) = k \Phi_{1m}$ et $\Phi_2'(0) = -k \Phi_{2m}$, les conditions aux limites cinématiques en $z = 0$ s'écrivent $s \eta_m = k \Phi_{1m}$ et $s \eta_m = -k \Phi_{2m}$. La condition aux limites dynamique s'écrit $\rho_1 [g k \eta_m + s \Phi_{1m}] = \rho_2 [g k \eta_m + s \Phi_{1m}] -$

$T k_x^2 \eta_m$. En éliminant Φ_{1m} et Φ_{2m} et en écartant la solution triviale $\eta_m = 0$, on en déduit $\rho_1 (gk + s^2) = \rho_2 (gk - s^2) - T k^3$. On a donc $\gamma = gk$.

6) On en déduit la relation de dispersion exprimée avec $\tilde{g}(k) = g + \frac{T}{\rho_1 - \rho_2} k^2$.

7) Dans le $\rho_1 \gg \rho_2$, on a $\omega = \sqrt{\tilde{g}(k)k}$ avec $\tilde{g}(k) = g + \frac{T}{\rho_1} k^2$.

8) En reprenant les étapes du calcul, on voit qu'il suffit de remplacer g par $\tilde{g}(k) = g + \frac{T}{\rho_1 - \rho_2} k^2$ dans la relation de dispersion.

9) On peut négliger la tension superficielle lorsque $g \gg \frac{T}{\rho_1} k^2$, c'est-à-dire pour des longueurs d'ondes $l = 2\pi/k$ telles que $l \gg l_c$ avec $l_c = 2\pi \sqrt{\frac{T}{g\rho_1}} \sim 1.7$ cm.

EXERCICE 4.4 Stabilité de l'écoulement de Poiseuille

On considère un fluide pesant de masse volumique ρ compris entre deux plaques planes horizontales délimitant les frontières $z = -h$ et $z = h$. On note $\underline{g} = -g \underline{e}_z$ le champ de gravité. On suppose que le mouvement de ce fluide est régi par le modèle des équations de Navier-Stokes incompressibles : $\text{div } \underline{U} = 0$, $d\underline{U}/dt = -\text{grad } \Pi - g \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}$, où g est la gravité, $p = \rho \Pi$ est le champ de pression et ν la viscosité cinématique. On suppose que le mouvement est 2D avec $\underline{U}(x, z, t) = u \underline{e}_x + w \underline{e}_z$. Les conditions aux limites sur les deux parois s'écrivent $u(x, h, t) = w(x, h, t) = 0$ et $u(x, -h, t) = w(x, -h, t) = 0$.

- 1) On considère le profil de vitesse $\underline{U}_e = U(z) \underline{e}_x$ avec $U(z) = U_0 [1 - (z/h)^2]$. Calculer la dérivée particulière $d\underline{U}_e/dt$ et tracer le profil $U(z)$.
- 2) Calculer le champ $\Pi_e(x, z)$ tel que (\underline{U}_e, Π_e) soit un équilibre du modèle en supposant que $\Pi_e(0, 0) = U_0^2$.
- 3) On définit les variables adimensionnées par $\underline{x} = h \underline{x}^*$, $\underline{U} = U_0 \underline{U}^*$, $t = (h/U_0) t^*$ et $\Pi = U_0^2 \Pi^*$. Écrire les équations de Navier-Stokes adimensionnées en faisant apparaître le nombre de Reynolds $Re = U_0 h/\nu$ et le nombre de Froude $Fr = U_0/\sqrt{gh}$. On pourra omettre les $*$ pour présenter le résultat final.
- 4) Écrire les conditions aux limites ainsi que $\underline{U}_e = U(z) \underline{e}_x$ et $\Pi_e(x, z)$ après adimensionnalisation, les $*$ étant omises désormais dans toutes les expressions.
- 5) Pour ces équations adimensionnées, on note $u = U(z) + \tilde{u}(x, z, t)$, $w = \tilde{w}(x, z, t)$ et $\Pi = \Pi_e(x, z) + \tilde{\Pi}(x, z, t)$ où \tilde{u} , \tilde{w} et $\tilde{\Pi}$ sont des petites perturbations. Écrire les équations linéarisées du modèle en ne conservant que les termes dominants.
- 6) Justifier l'existence d'une fonction $\psi(x, z, t)$ telle que $\tilde{u} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $\tilde{w} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Comment se nomme-t-elle ?
- 7) Montrer que l'élimination de la pression conduit à l'équation d'Orr-Sommerfeld

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + a_1 U(z) \frac{\partial}{\partial x} \right] \Delta \psi - a_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} U''(z) = a_3 Re^{-1} \Delta^2 \psi$$

où a_1 , a_2 et a_3 sont des constantes dont on indiquera la valeur.

- 8) Expliciter les conditions aux limites à l'aide de ψ .

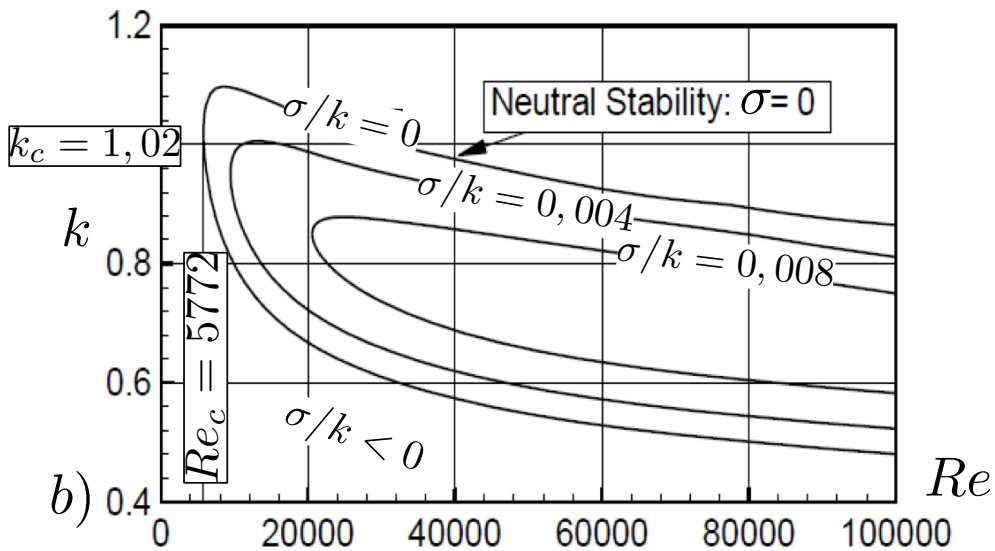
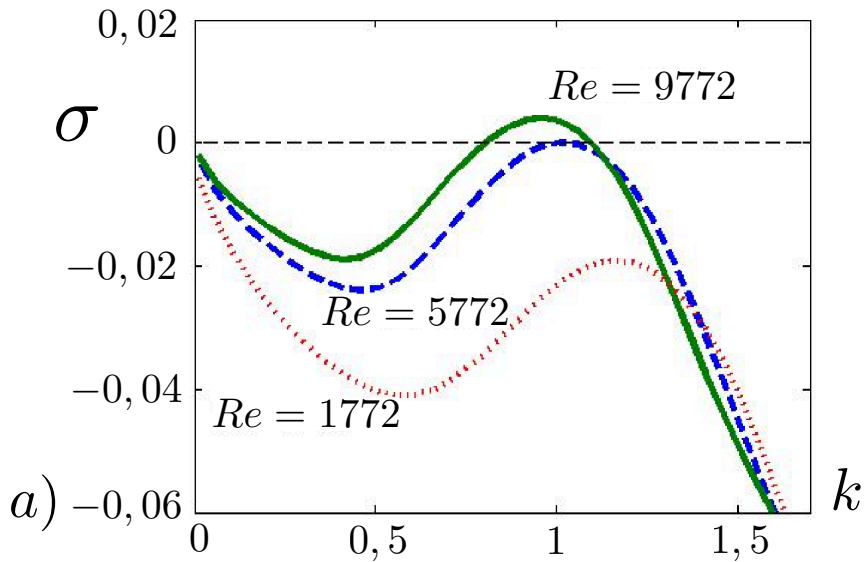


FIGURE 4.4 – a) Taux de croissance σ en fonction du nombre d'onde k . b) Iso-contours positifs de σ/k dans le plan (Re, k) .

- 9) Justifier la recherche de solutions de l'équation d'Orr-Sommerfeld sous la forme $\psi(x, z, t) = \Psi(z) \exp(ikx + st)$ où $s = \sigma - i\omega \in \mathbb{C}$.
- 10) Montrer que $\Psi(z)$ vérifie l'équation du quatrième ordre

$$\left[\frac{\sigma}{k} + i \left(1 - z^2 - \frac{\omega}{k} \right) \right] (D^2 - k^2)\Psi(z) + i a_4 \Psi(z) = \frac{1}{k Re} (D^2 - k^2)^2 \Psi(z),$$

où $D = d/dz$ et a_4 est une constante que l'on précisera. Écrire les conditions aux limites vérifiées par $\Psi(z)$ en $z = \pm 1$.

- 11) Les taux de croissance $\sigma = \Sigma(k, Re)$ obtenus en résolvant numériquement cette équation avec ses conditions aux limites sont représentés sur la figure 4.4. Discuter la stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan en fonction de la valeur du nombre de Reynolds.

- 12) Au voisinage du seuil de l'instabilité, les modes instables sont appelés "ondes de Tollmien-Schlichting". Exprimer leur longueur d'onde l_c en fonction de la longueur h .
- 13) La déstabilisation de l'écoulement de Poiseuille est-elle une bifurcation super-critique ou sous-critique ?

Corrigé 4.4 Stabilité de l'écoulement de Poiseuille

1) On a $\frac{dU_e}{dt} = 0$ et le tracé de $U(z)$ est une parabole. **2)** On a $\Pi_e(x, z) = \Pi_r - 2\nu U_0 x/h^2 - gz$. **3)** En omettant les *, on obtient $\text{div } \underline{U} = 0$, $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = -\text{grad } \Pi - Fr^{-2} \underline{e}_z + Re^{-1} \Delta \underline{U}$. **4)** Les conditions aux limites adimensionnées s'écrivent $u(x, 1, t) = w(x, 1, t) = 0$ et $u(x, -1, t) = w(x, -1, t) = 0$. L'équilibre s'écrit $\underline{U}_e = U(z) \underline{e}_x$ avec $U(z) = (1 - z^2)$ et $\Pi_e = 1 - 2Re^{-1}x - Fr^{-2}z$. **5)** En remarquant que les termes d'ordre zéro s'annulent et en négligeant les termes d'ordre deux, on obtient $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U(z) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{w} U'(z) = -\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial x} - Re^{-1} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \tilde{u}$ et $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + U(z) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial z} - Re^{-1} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \tilde{w}$. **6)** L'incompressibilité justifie le choix d'une fonction de courant. **7)** En dérivant par $-\frac{\partial}{\partial z}$ l'équation pour \tilde{u} , par $\frac{\partial}{\partial x}$ l'équation pour \tilde{w} puis en les sommant, on obtient l'équation indiquée pour $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. **8)** On a $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$ pour $z = \pm 1$. **9)** On cherche des solutions sous cette forme dans la mesure où le système est invariant par translations en x et en t , mais pas en z . **10)** Comme $U'' = -2$, on a $a_4 = 2$. Les conditions aux limites sont $\Psi = D\Psi = 0$ en $z = \pm 1$. **11)** L'écoulement est stable jusqu'au seuil $Re_c = 5772$. **12)** Comme $k_c = 1,02$, on a $l_c = 2\pi h/k_c \sim 6,16h$. **13)** Comme pour tous les écoulements parallèles, la bifurcation est sous-critique.

2 Exercice sur le chapitre 2

EXERCICE 4.5 Rouleaux et relation de dispersion

On considère un champ de vitesse 2D défini par la fonction de courant $\psi(x, y, t)$ à l'aide des relations $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. On suppose que ψ est solution d'une équation aux dérivées partielles linéarisée autour d'un équilibre dont les coefficients sont réels et constants en espace et en temps.

- 1) En l'absence de conditions aux limites, c'est-à-dire dans un milieu infini, justifier la recherche de solutions bornées en espace de la forme $\psi = \Psi_m e^{ik_x x} e^{ik_z z} e^{st}$ où Ψ_m est une amplitude complexe.
- 2) On suppose que la relation de dispersion généralisée est de la forme $s = \Sigma(k)$ où $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ est le module du vecteur d'onde $\underline{k} = k_x \underline{e}_x + k_z \underline{e}_z$ et $\Sigma(k)$ une fonction réelle. Quelles conditions doit vérifier la fonction Σ pour que l'équilibre soit stable ?
- 3) On suppose maintenant que ψ doit vérifier les conditions aux limites $\psi(x, 0) = 0$ et $\psi(x, d) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on peut trouver une solution réelle du problème avec conditions aux limites de la forme

$$\psi(x, z, t) = A \exp(st) \cos(k_x x) \sin(n\pi z/d)$$

où $A \in \mathbb{R}$ et n est un entier quelconque avec $s = \Sigma(k)$. Détailler le raisonnement permettant d'affirmer que ψ est bien une solution.

- 4) Tracer les lignes de champ du champ de vitesse ainsi obtenues dans le cas $n = 1$.
- 5) Tracer, pour ce même cas, les vecteurs vitesses sur le même graphe en supposant $A > 0$.

Corrigé 4.5 Rouleaux et relation de dispersion

1) Comme le système d'équations aux dérivées partielles est invariant par les translations d'espace et de temps, on sait que les modes propres sont de la forme indiquée. Comme les coefficients sont réels et que le système est linéaire, la partie réelle d'une solution complexe est solutions.

2) Pour que l'équilibre étudié soit stable, il faut que la partie réelle de Σ soit strictement négative pour tous les modes, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de k .

3) Les fonctions $\phi_+ = \frac{1}{2i} A e^{i k_x x} e^{i \pi z} e^{\Sigma(k) t}$ et $\phi_- = -\frac{1}{2i} A e^{i k_x x} e^{-i \pi z} e^{\Sigma(k) t}$ sont des solutions complexes élémentaires dans la mesure où les vecteurs d'ondes $\underline{k}_+ = k_x \underline{e}_x + k_z \underline{e}_z$ et $\underline{k}_- = k_x \underline{e}_x - k_z \underline{e}_z$ ont le même module. Leur somme est égale à la fonction $\psi = A e^{\Sigma(k) t} \cos(k_x x) \sin(\pi z)$ qui est donc solution du problème linéaire. On peut donc choisir A réel et $A(t) = A e^{\Sigma(k) t}$.

4) Les isolignes sont celles des rouleaux de convection : des cercles au centre, des carrés aux frontières et une transformation de cercles en carrés au milieu (voir figure 2.6). La période en x est $L_x = 2\pi/k_x$. La hauteur en z est de 1. Les maxima et minima de ψ alternent tous les $L_x/2$ dans la direction x .

5) En supposant $A > 0$, le champ de vitesse $\underline{U} = -\underline{e}_y \wedge \text{grad } \psi$ tourne dans le sens trigonométrique autour des maxima de ψ et dans le sens horaire autour de ses minima.

PROBLÈME 4.6 Milieu poreux en rotation

On considère un fluide pesant s'écoulant dans un milieu poreux d'extension infini (éloigné de toute frontière). On note $\underline{g} = -g \underline{e}_z$ le champ de gravité. L'ensemble du dispositif est soumis à une rotation uniforme d'axe vertical $\underline{\Omega}_0 = \Omega_0 \underline{e}_z$. On suppose que la température du fluide est constante et que le mouvement de ce fluide, dans le repère tournant, est régi par le modèle :

$$\frac{d\underline{U}}{dt} + 2 \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho_r} \text{grad } p - g \underline{e}_z - \beta \underline{U}, \quad (4.5)$$

où β est une constante positive rendant compte du frottement du milieu poreux (loi de Darcy). On note $\underline{U}(x, y, z, t) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z$ et $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad}$ (dérivée particulaire).

- 1) Montrer le repos $\underline{U} = \underline{0}$ est une solution du problème. Expliciter, pour cet équilibre, le champ de pression $p_c(z)$ associé en supposant que $p_c(0) = p_r$.

- 2) On pose $p(\underline{x}, t) = p_c(z) + \rho_r \Pi(\underline{x}, t)$. Montrer que les équations du modèle linéarisées autour du repos peuvent s'écrire $\text{div } \underline{U} = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + 2\Omega_0 \underline{e}_z \wedge \underline{U} = -\text{grad } \Pi - \beta \underline{U}$.
- 3) On choisit d'adimensionnaliser les équations avec les unités $[L] = g/(4\Omega_0^2)$, $[\tau] = 1/(2\Omega_0)$, $[U] = [L]/[\tau]$ et $[\Pi] = [U]^2$. Écrire les équations du modèle linéarisé ainsi adimensionnées en mettant en évidence le nombre sans dimension $E = \beta/(2\Omega_0)$.
- 4) On note désormais les grandeurs adimensionnées avec les mêmes notations que celles des grandeurs physiques. On s'intéresse aux petits mouvements quasi-2D définis par

$$\underline{U} = u(x, z, t) \underline{e}_x + v(x, z, t) \underline{e}_y + w(x, z, t) \underline{e}_z \quad \text{et} \quad \Pi = \Pi(x, z, t). \quad (4.6)$$

Écrire les équations adimensionnées pour les composantes u , v et w .

- 5) Justifier, sans démonstration, l'existence d'une fonction de courant $\psi(x, z, t)$ telle que

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.7)$$

- 6) En déduire que le système peut s'écrire sous la forme $\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = -A_1 \frac{\partial}{\partial z} v - A_2 \Delta \psi$ et $\frac{\partial}{\partial t} v = A_3 \frac{\partial}{\partial z} \psi - A_4 v$ où A_1 , A_2 , A_3 et A_4 sont des constantes que l'on déterminera.
- 7) On cherche des solutions complexes de la forme

$$[\psi(x, z, t), v(x, z, t)] = [\Psi_m, V_m] e^{i k_x x + i k_z z + s t}, \quad (4.8)$$

où Ψ_m et V_m sont des constantes complexes. Justifier la recherche de solutions sous cette forme.

- 8) En déduire la relation de dispersion généralisée des perturbations de l'état de repos. Montrer que l'on peut écrire $s = -A_5 \pm i \Omega(k_x, k_z)$ où A_5 est une constante que l'on précisera.
- 9) On note $\theta(k_x, k_z)$ l'angle défini par $k_x = k \cos \theta$, $k_z = k \sin \theta$ et $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$. Exprimer $\Omega(k_x, k_z)$ en fonction de $\theta(k_x, k_z)$.
- 10) Le repos est-il stable ou instable vis-à-vis des petites perturbations?
- 11) Tracer très schématiquement une composante de vitesse en fonction du temps pour un point quelconque dans le cas $k_x = k_z$ et $E = 1$.

Corrigé 4.6 Milieu poreux en rotation

1) On a $p_c(z) = p_1 - \rho_r g z$. **2)** En remplaçant dans les équations, les termes $-\text{grad } p_c/\rho_r - g \underline{e}_z = 0$ disparaissent. Il suffit ensuite de négliger le terme $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$. **3)** En utilisant les mêmes notations que pour les grandeurs avec dimensions, les équations adimensionnalisées s'écrivent $\text{div } \underline{U} = 0$, $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{e}_z \wedge \underline{U} = -\text{grad } \Pi - E \underline{U}$. **4)** Dans le cas quasi-2D, le modèle s'écrit $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} - v = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} - E u$, $\frac{\partial v}{\partial t} + u = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} - E v$, $\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} - E w$. **5)** Les champs de vitesse 2D incompressibles s'écrivent à l'aide d'une fonction de courant. **6)** En multipliant l'équation en $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ par $-\frac{\partial}{\partial z}$ et l'équation en $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ par $\frac{\partial}{\partial x}$ puis en les sommant, on obtient $A_1 = 1$ et $A_2 = E$. De plus, $A_3 = 1$ et

$A_4 = E$. **7)** Comme les équations sont linéaires à coefficients réelles, on peut chercher des solutions complexes et prendre ensuite leur partie réelle. La forme des solutions recherchées est justifiée par l'invariance du problème par les translations en temps et en espace, dans toutes les directions. **8)** En reportant dans les équations, on obtient $(s + E)(-k^2) \Psi_m = -i k_z V_m$ et $(s + E) V_m = i k_z \Psi_m$ avec $k^2 = k_x^2 + k_z^2$. On en déduit la relation de dispersion généralisée $(s + E)^2 = -k_z^2/k^2$ et donc $s = -E \pm i \Omega(k_x, k_z)$ avec $\Omega(k_x, k_z) = k_z/k = k_z/\sqrt{k_x^2 + k_z^2}$. **9)** On a $\Omega(k_x, k_z) = \sin \theta(k_x, k_z)$. **10)** Le repos est toujours stable car $\text{Re}(s) = -E < 0$. **11)** La vitesse en un point est proportionnelle à la fonction $f(t) = e^{-t} \cos(t/\sqrt{2} + \varphi)$ on φ est une phase. Il s'agit d'une sinusoïde qui décroît fortement au bout d'une période.

EXERCICE 4.7 Convection thermohaline

La convection thermohaline est le mouvement induit par les changements de masse volumique dus aux variations de température et de concentration de sel dans l'eau. On décrit ici ces mouvements de convection par le modèle

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{U} &= 0, & \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_r} \text{grad } p - \frac{\rho}{\rho_r} g \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}, \\ \frac{\rho}{\rho_r} &= 1 - \alpha(T - T_r) + \beta(S - S_r), & \frac{dT}{dt} &= \kappa_T \Delta T, & \frac{dS}{dt} &= \kappa_S \Delta S, \end{aligned} \quad (4.9)$$

où \underline{U} est le champ de vitesse, T le champ de température, S le champ de salinité et p le champ de pression. Les coefficients de diffusivité de la température et de la salinité sont respectivement κ_T et κ_S . Les coefficients de dilatation dus à la température et à la salinité sont respectivement $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On a noté ρ_r , T_r et S_r des constantes de référence. La gravité g est dans la direction Oz .

On s'intéresse aux rouleaux de convection qui se développent dans une couche fluide comprise entre deux plaques planes d'équations respectives $z = 0$ et $z = d$ où d est l'épaisseur de la couche. Le forçage du mouvement est induit par les conditions aux limites $(T, S) = (T_1, S_1)$ en $z = 0$ et $(T, S) = (T_2, S_2)$ en $z = d$ avec $T_1 > T_2$ et $S_1 > S_2$. On suppose que les champs sont indépendants de y et que la vitesse v dans cette direction est nulle. On suppose des conditions aux limites sans glissement pour la vitesse, c'est-à-dire $w = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

- 1) Calculer les profils conductifs $T_c(z)$ et $S_c(z)$ obtenus dans le cas $\underline{U} = \underline{0}$. En déduire

$$\begin{aligned} p_c &= p_r - \rho_r g z + \rho_r \alpha g (T_1 - T_r) z - \rho_r \alpha g \frac{T_1 - T_2}{2d} z^2 \\ &\quad - \rho_r \beta g (S_1 - S_r) z + \rho_r \beta g \frac{S_1 - S_2}{2d} z^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

On a $T_c = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{d} z$ et $S_c = S_1 - \frac{S_1 - S_2}{d} z$. Comme $\rho_c = 1 - \alpha(T_c - T_r) + \beta(S_c - S_r)$ et $p'_c(z) = -\rho_r g \rho_c(z)$, on en déduit l'expression de $p_c(z)$ indiquée.

- 2) On pose $T = T_c(z) + \theta(x, z, t)$ et $S = S_c(z) + \Sigma(x, z, t)$ et $p = p_c(z) + \rho_r \Pi(x, t)$. Exprimer, à l'aide de ces nouvelles variables, les équations du modèle avec ses conditions aux limites.

Les équations du modèle se mettent sous la forme $\text{div } \underline{U} = 0$, $\frac{d\underline{U}}{dt} = -\text{grad } \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z - \beta g \Sigma \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{d} w + \kappa_T \Delta \theta$, $\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{S_1 - S_2}{d} w + \kappa_S \Delta \Sigma$ avec les conditions aux limites $\theta = 0$, $\Sigma = 0$, $w = 0$ et $\frac{du}{dz} = 0$ en $z = 0$ et $z = d$.

- 3) On choisit d comme unité de longueur, d^2/κ_T comme unité de temps, $T_1 - T_2$ comme unité de température et $S_1 - S_2$ comme unité de salinité. Écrire les équations adimensionnées à l'aide des nombres sans dimension

$$R_T = \frac{\alpha g d^3 (T_1 - T_2)}{\nu \kappa_T}, \quad R_S = \frac{\beta g d^3 (S_1 - S_2)}{\nu \kappa_S},$$

$$P = \frac{\nu}{\kappa_T} \quad \text{et} \quad L = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}$$

respectivement appelés "Rayleigh thermique", "Rayleigh salin", "Prandtl" et "Lewis".

On pose $x = dx_*$, $z = dz_*$, $t = (d^2/\kappa_T)t_*$, $u = (\kappa_T/d)u_*$, $w = (\kappa_T/d)w_*$, $\theta = (T_1 - T_2)\theta_*$, $\Sigma = (S_1 - S_2)\Sigma_*$ et $\Pi = (\kappa_T^2/d^2)\Pi_*$. En remplaçant dans les équations du modèle puis en omettant les indices *, on obtient $\text{div } \underline{U} = 0$, $\frac{d\underline{U}}{dt} = -\text{grad } \Pi + R_T P \theta \underline{e}_z - R_S P L^{-1} \Sigma \underline{e}_z + P \Delta \underline{U}$, $\frac{d\theta}{dt} = w + \Delta \theta$, et $\frac{d\Sigma}{dt} = w + L^{-1} \Delta \Sigma$.

- 4) On s'intéresse aux petites perturbations de l'équilibre. Montrer que l'on peut mettre le système sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = R_T P \frac{\partial \theta}{\partial x} - R_S P L^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} + P \Delta^2 \psi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + L^{-1} \Delta \Sigma.$$

On peut tout d'abord négliger les termes non linéaires en $\underline{U} \cdot \text{grad}$. On définit une fonction courant ψ par les relations $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. En prenant le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement, on obtient l'équation pour $\Delta \psi$ indiquée.

- 5) On cherche des solutions complexes du modèle linéarisé sous la forme

$$(\psi, \theta, \Sigma) = (\psi_m, \theta_m, \Sigma_m) e^{i(k_x x + k_z z) + s t} \quad (4.11)$$

où $(\psi_m, \theta_m, \Sigma_m)$ sont trois amplitudes complexes, $\underline{k} = k_x \underline{e}_x + k_z \underline{e}_z$ un vecteur d'onde réel et $s = \sigma - i\omega$ une valeur propre complexe. Montrer que s doit être la racine de l'équation

$$s k^2 P^{-1} = A k_x^2 (s + k^2)^{-1} - B k_x^2 (s L + k^2)^{-1} - k^4, \quad (4.12)$$

où A et B sont des constantes que l'on explicitera. En déduire que les valeurs propres s sont les racines d'un polynôme d'ordre 3 (qu'il n'est pas nécessaire de développer).

Le système linéaire peut se mettre sous la forme $-s k^2 \psi_m = R_T P i k_x \theta_m - R_S P L^{-1} i k_x \Sigma_m + P k^4 \psi_m$, $s \theta_m = i k_x \psi_m - k^2 \theta_m = 0$ et $s \Sigma_m = i k_x \psi_m - L^{-1} k^2 \Sigma_m = 0$. En annulant le déterminant de ce système, on obtient $s k^2 P^{-1} = R_T k_x^2 (s + k^2)^{-1} - R_S k_x^2 (s L + k^2)^{-1} - k^4$. Donc $A = R_T$ et $B = R_S$.

- 6) Montrer que $s = 0$ est une racine de ce polynôme lorsque $R_T - R_S = F(k_x, k_z)$ où F est une fonction que l'on explicitera. Dans le cas où les deux autres racines ont des parties réelles strictement négatives, discuter la stabilité de l'état conductif lorsque le paramètre $R = R_T - R_S$ est proche de $F(k_x, k_z)$.

En supposant que $s = 0$ pour le polynôme d'ordre 3 qui exprime la relation de dispersion généralisée, on obtient la relation $R_T - R_S = k^6/k_x^2$. On a donc $F(k_x, k_z) = (k_x^2 + k_z^2)^3/k_x^2$. Si $R_T - R_S > F(k_x, k_z)$, la valeur propre $s = 0$ devient positive et l'équilibre devient instable. Si $R_T - R_S < F(k_x, k_z)$, l'équilibre est stable.

- 7) Montrer que les choix $k_z = n\pi$ et $k_z = -n\pi$ avec n entier permettent de construire des solutions satisfaisant les conditions aux limites. En déduire la taille des rouleaux de convection lorsque l'état conductif bifurque vers une solution stationnaire.

La superposition de deux solutions ayant le même k_x , des k_z opposés avec $k_z = n\pi$ et des amplitudes opposées, est une nouvelle solution. Elle satisfait les conditions aux limites. Le minimum de $(k_x^2 + n^2 \pi^2)^3 / k_x^2$ est obtenu pour $k_c = \pi/\sqrt{2}$ et vaut $R_c = 27\pi^4/4$. Le seuil d'instabilité est obtenu pour $R_T - R_S = R_c$ et $k = k_c$. La taille des rouleaux de convection au seuil de cette instabilité stationnaire est alors $L_c = 2\pi/k_c = 2\sqrt{2}$.

3 Exercice sur le chapitre 3

EXERCICE 4.8 Bifurcation noeud-col

On considère le système dynamique $\dot{X} = F(X) = \mu + \alpha X^2$ avec $X(t) \in \mathbb{R}$.

- 1) Déterminer les équilibres en fonction des valeurs de μ et $\alpha \neq 0$.

Si $\alpha \mu < 0$ et $\mu \neq 0$ il existe deux équilibres solution de $F(X) = 0$. Si $\mu = 0$, $X = 0$ est le seul équilibre. $X_+ = \sqrt{-\mu/\alpha}$ et $X_- = -\sqrt{-\mu/\alpha}$. Si $\alpha \mu < 0$

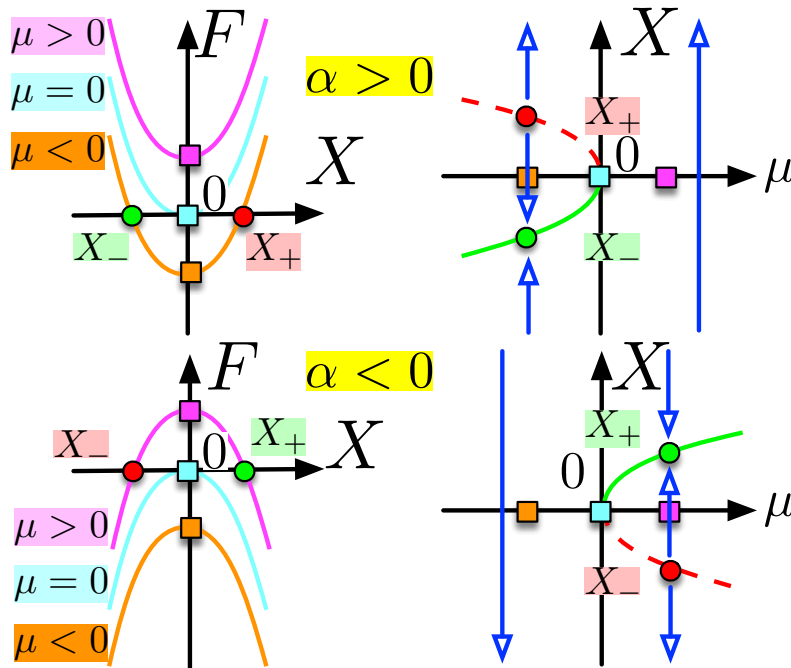


FIGURE 4.5 – Bifurcation noeud-col.

- 2) En utilisant les notations $X_+ = \sqrt{-\mu/\alpha}$ et $X_- = -\sqrt{-\mu/\alpha}$ lorsqu'elles sont définies, discuter la stabilité des équilibres en fonction des valeurs de α et μ .

Pour $\alpha > 0$ et $\mu < 0$, comme $F'(X_+) > 0$ et $F'(X_-) < 0$, X_+ est instable et X_- est stable. Pour $\alpha < 0$ et $\mu > 0$, comme $F'(X_+) < 0$ et $F'(X_-) > 0$, X_+ est stable et X_- est instable.

- 3) Tracer le diagramme de bifurcation lorsque μ varie pour $\alpha < 0$. Même question pour $\alpha > 0$.

| Voir figure 4.5.

EXERCICE 4.9 Bifurcation fourche imparfaite

On considère le système dynamique $\dot{x} = \mu x - x^3 + \epsilon$ avec $x(t) \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in \mathbb{R}_+$.

- 1) Définir l'espace des phases et l'espace de contrôle de ce système. Dans le cas particulier $\epsilon = 0$, calculer les équilibres et tracer le diagramme de bifurcation en fonction de μ en dessinant les trajectoires. Comme se nomme la bifurcation obtenue ?

| L'espace des phases des états x est \mathbb{R} et l'espace des paramètres de contrôle (μ, ϵ) est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Le diagramme de bifurcation pour $\epsilon = 0$ est celui d'une bifurcation fourche supercritique.

- 2) Sans faire de calcul, mais en traçant éventuellement l'allure de fonctions utiles, tracer le diagramme de bifurcation en fonction de μ dans le cas $0 < \epsilon \ll 1$. Quelle est ou quelles sont les bifurcations obtenues dans ce cas.

| Le tracé des fonctions $f(\mu, \epsilon; x) = \mu x - x^3 + \epsilon$ pour différentes valeurs de μ permet de déterminer le nombre d'équilibres et leur stabilité et de tracer le diagramme de bifurcation (figure 4.6). La bifurcation fourche est remplacée par une bifurcation noeud-col à cause de la brisure de symétrie induite par le (petit) terme ϵ .

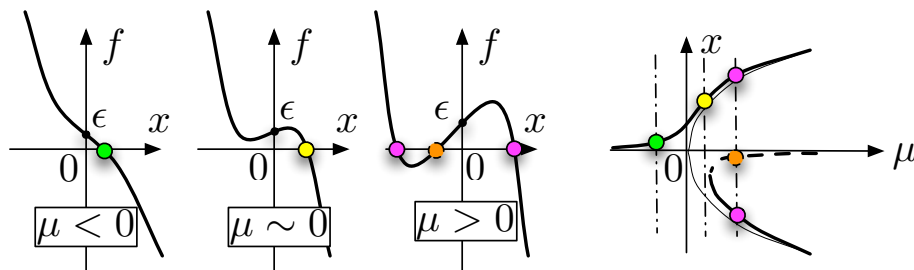


FIGURE 4.6 – Bifurcation fourche imparfaite.

EXERCICE 4.10 Bifurcations avec hysteresis

On considère le système dynamique réel $\dot{X} = \mu + 3X - X^3$ où $X(t) \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On cherche à déterminer et interpréter son diagramme de bifurcation.

- 1) Tracer la fonction $G(X) = 3X - X^3$ en spécifiant les coordonnées de ses extrema.
- 2) Tracer la fonction $F(X) = \mu + G(X)$ pour toutes les valeurs significatives de μ . Indiquer à chaque fois son nombre de racines.
- 3) Tracer dans le plan (μ, X) les équilibres $X_\epsilon(\mu)$ du système dynamique.

- 4) Déterminer la stabilité de chacun de ces équilibres et tracer en traits pleins les équilibres stables et en traits pointillés les équilibres instables.
- 5) Tracer, dans le plan (μ, X) , les trajectoires du système dynamique.
- 6) Décrire le phénomène d'hysteresis observé en augmentant μ d'une valeur fortement négative vers une valeur fortement positive puis en le diminuant de nouveau.

Corrigé 4.9 Bifurcations avec hysteresis

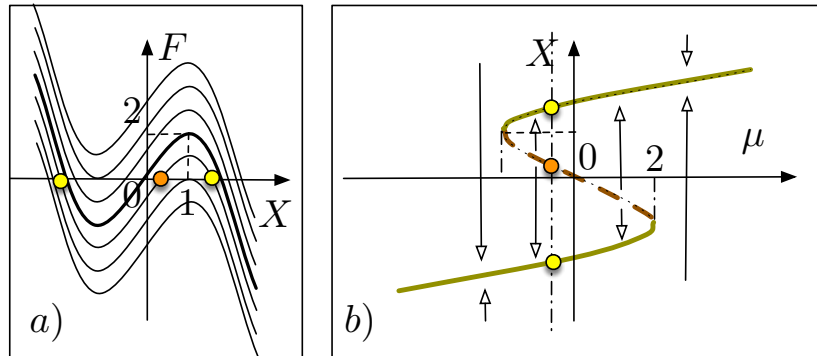


FIGURE 4.7 – a) Fonction $F(X)$ pour plusieurs valeurs de μ . b) Diagramme de bifurcation.

- 1) La fonction $G(X)$ est tracée en traits gras sur la figure 4.7a. Ses extrema sont atteints en $X = \pm 1$ et valent respectivement ± 2 .
- 2) Les fonctions $F(X)$ sont tracées sur la figure 4.7a. Elles ont une racine pour $|\mu| > 2$, deux (dont une double) pour $|\mu| = 2$ et trois pour $|\mu| < 2$.
- 3) Le tracé des équilibres est la courbe $\mu = 3X - X^3$ dans le plan (μ, X) (figure 4.7b).
- 4) La stabilité des équilibres X_e s'obtient en lisant sur la figure 4.7a le signe de la dérivée $F'(X_e)$. On obtient le graphe de la figure 4.7b.
- 5) Les trajectoires sont des points, des segments de droites ou des demi-droites représentées sur la figure 4.7b.
- 6) En augmentant μ , on suit l'équilibre stable positif jusqu'à $\mu = 2$ où l'on transite brusquement vers l'équilibre stable négatif. Si l'on diminue alors μ , on reste sur cet équilibre jusqu'à $\mu = -2$ où l'on transite de nouveau.

EXERCICE 4.11 Polynôme de degré trois

On considère le système dynamique réel défini par $\dot{X} = F(X)$ avec $X(t) \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $F(X) = \mu X - X^2 + X^3$.

- 1) Déterminer les équilibres X_e en fonction des valeurs de μ .
- 2) Tracer l'ensemble de ces équilibres dans un diagramme (μ, X) .
- 3) Indiquer la valeur de μ_* au-delà de laquelle il n'existe plus qu'un seul équilibre.

- 4) Tracer $F(X)$ pour les cinq cas suivants :
 $\mu \in]-\infty, 0[$, $\mu = 0$, $\mu \in]0, \mu_*[$, $\mu = \mu_*$ et $\mu \in]\mu_*, \infty[$.
- 5) Discuter la stabilité de tous les équilibres.
- 6) Tracer le diagramme de bifurcation dans le plan (μ, X) en représentant les trajectoires à l'aide de flèches.

Corrigé 4.9 Polynôme de degré trois

1) L'équilibre $X = 0$ existe pour toutes les valeurs de μ . Pour $\mu < \mu_* = 1/4$, il existe deux équilibres supplémentaires $X_e^\pm = (1 \pm \sqrt{1 - 4\mu})/2$, qui ne sont plus que $X_e^* = 1/2$ pour $\mu = \mu_*$. **2)** Le tracé des équilibres est constitué de la droite $X = 0$ et de la parabole $\mu = X - X^2$ de sommet $(\mu, X) = (\mu_*, X_e^*) = (1/4, 1/2)$. **3)** Pour $\mu > \mu_* = 1/4$, il n'y a plus qu'un équilibre. **4)** Le tracé de $Y = F(X)$ est représenté sur la figure 4.8 pour les cinq cas considérés. **5)** Un équilibre X_e est stable si sa dérivée $F'(X_e)$ est négative. Comme $F'(0) = \mu$, l'équilibre $X_e = 0$ est stable pour $\mu < 0$, marginal pour $\mu = 0$ et instable pour $\mu > 0$. Comme $F'(X_e) = X_e(2X_e - 1)$ pour $X_e = X_e^\pm$, on en déduit que le seul cas de stabilité pour ces équilibres est pour $X_e = X_e^-$ et $\mu \geq 0$. **6)** Le diagramme de bifurcation avec ses trajectoires est tracé sur la figure 4.8.

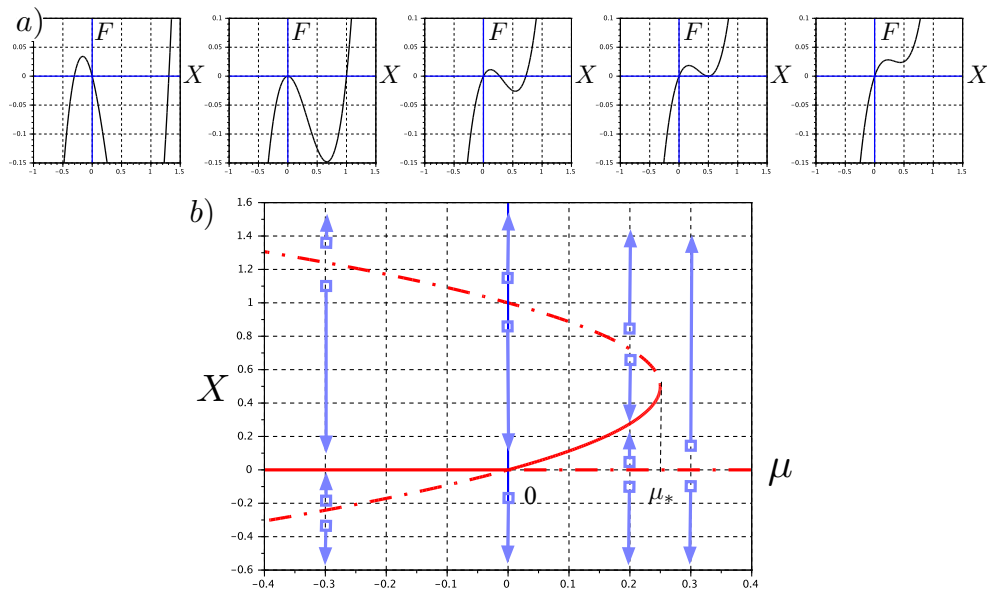


FIGURE 4.8 – a) Fonction $F(X)$ dans ses cinq configurations. b) Diagramme de bifurcation.

EXERCICE 4.12 Équations de Saint-Venant

On considère le système des équations de Saint-Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \alpha - \frac{g|U|U}{K^2 h^{4/3}}, \quad (4.13)$$

où $U(x, t)$ et $h(x, t)$ sont respectivement la vitesse et la hauteur d'une couche de fluide peu profonde à surface libre coulant sur un plan incliné faisant un angle

α avec l'horizontale. La gravité est noté g et K est le "nombre de Strickler" qui caractérise le frottement du fluide sur le fond. On suppose que $U \geq 0$.

- 1) Montrer que les solutions homogènes et stationnaires (h_n, U_n) vérifient $U_n = K h_n^{2/3} \sqrt{I}$ où I est une constante que l'on déterminera. Quelle est la dimension du nombre de Strickler ?

On a $U_n = K h_n^{2/3} \sqrt{I}$ avec $I = \sin \alpha$. L'unité de K est en $\text{m}^{1/3}/\text{s}$.

- 2) On choisit h_n comme unité de longueur, U_n comme unité de vitesse et h_n/U_n comme unité de temps. Écrire les équations ainsi adimensionnées en faisant apparaître le nombre de Froude $Fr = U_n/\sqrt{g \cos \alpha h_n}$ ainsi que le nombre sans dimension $M = g K^{-2} h_n^{-1/3}$.

En notant les champs adimensionnés de la même façon que les champs avec dimensions, on obtient $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(U \tilde{h})}{\partial \tilde{x}} = 0$ et $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + U \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} = -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + M \left(1 - \frac{|U|U}{h^{4/3}}\right)$.

- 3) Calculer la relation de dispersion des ondes dans le cas $M = 0$ et $F = O(1)$. Exprimer les vitesses de phases en revenant aux grandeurs dimensionnelles. Ces ondes sont-elles dispersives ?

Dans le cas $M = 0$, la linéarisation $U = 1 + \tilde{U}$ et $1 + \tilde{h}$ des équations conduit à $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} = -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}$ et $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} = 0$. La recherche de solution de la forme $(U, \tilde{h}) = (A, B) \exp(i k x + s t)$ conduit aux équations $(s + i k)A = -\frac{1}{Fr^2} i k B$ et $(s + i k)B + i k A = 0$. En annulant le déterminant de ce système linéaire on obtient $(s + i k)^2 + k^2/Fr^2 = 0$. On en déduit $s = -i\omega$ avec $\omega = k(1 \pm 1/Fr)$. En grandeurs dimensionnées, la vitesse de phase de ces ondes non dispersives est $c_\varphi = U_n \pm \sqrt{g \cos \alpha h_n}$.

- 4) Calculer la relation de dispersion des ondes dans le cas $1/M = 0$ et $F = O(1)$. Exprimer les vitesses de phases en revenant aux grandeurs dimensionnelles. Ces ondes sont-elles dispersives ?

Dans le cas M infini, on a $U = h^{2/3}$ en grandeur adimensionnées et donc $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(h^{5/3}) = 0$. Les petites perturbations de l'équilibre $(U, h) = (1, 1)$ vérifient $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{5}{3} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = 0$. La relation de dispersion des ondes est alors $\omega = \frac{5}{3} k$. La vitesse de phase de ces ondes non dispersives est $c_\varphi = \frac{5}{3} U_n$ en grandeur dimensionnée.

- 5) Dans le cas $M = O(1)$ et $F = O(1)$, écrire les équations linéarisées autour de l'équilibre.

Dans le cas général, les équations linéarisées sont $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} = -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - 2M \tilde{U} + \frac{4}{3} M \tilde{h}$ et $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} = 0$.

- 6) Montrer que la stabilité de l'équilibre dépend des racines complexes d'un polynôme de degré deux en $s = \sigma - i\omega$ dont on explicitera les coefficients en fonction des données du problème.

La recherche de solution de la forme $(U, h) = (A, B) \exp(i k x + s t)$ conduit aux équations $(s + i k)A = -\frac{1}{Fr^2} i k B - 2M A + \frac{4}{3} M B$ et $(s + i k)B + i k A = 0$. En annulant le déterminant de ce système linéaire, on obtient l'équation $(s + i k + 2M)(s + i k) - i k \left(ik \frac{1}{Fr^2} - \frac{4}{3} M\right) = 0$.

- 7) Montrer que l'écoulement de base se déstabilise pour un nombre de Froude critique F_c que l'on calculera. On pourra poser $\sigma = 0$ et calculer les parties réelles et imaginaires du polynôme.

La courbe marginale dans l'espace des paramètres de contrôle est déterminée par la relation $\sigma = 0$. Le polynôme caractéristique en $s = -i\omega$ s'écrit alors $[i(-\omega + k) + 2M]i(-\omega + k) - ik \left(ik \frac{1}{F_c^2} - \frac{4}{3}M \right) = 0$. En annulant les parties réelles et imaginaires, on obtient $(-\omega + k) = -\frac{2}{3}k$ et $(-\omega + k)^2 = k^2/F_c^2$ d'où $\omega = \frac{5}{3}k$ et $F_c = 3/2$.

Bibliographie

- [1] P. BERGE, Y. POMEAU, C. VIDAL, L'ordre dans le chaos, Hermann, 1984.
- [2] S. CHANDRASEKHAR, Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Clarendon Press, 1981.
- [3] F. CHARRU, Instabilités hydrodynamiques, EDP Sciences, 2007.
- [4] P. G. DRAZIN, W. H. REID, Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, 2nd Edition, 2004.
- [5] E. GUYON, J.-P. HULIN, L. PETIT, Hydrodynamique physique, EDP Sciences, nouvelle éditions, 2001.
- [6] O. THUAL, Introduction à la mécanique des milieux continus déformables, Cépaduès-Éditions, 1997.
- [7] O. THUAL, Mécanique des Milieux Continus, *Éd. Ress. Pédago. Ouv. INPT 1018* (2012) 50h
<http://pedagotech.inp-toulouse.fr/121018>
- [8] O. THUAL, Instabilités hydrodynamiques, *Éd. Ress. Pédago. Ouv. INPT 1017* (2020) 12h
<http://pedagotech.inp-toulouse.fr/201017>
- [9] O. THUAL, Des ondes et des fluides, Cépaduès-Éditions, 2005.
- [10] O. THUAL, Hydrodynamique de l'environnement, Éditions de l'École Polytechnique, 2010.
- [11] O. THUAL, Pédagothèque Dynamique,
<http://thual.perso.enseeiht.fr/otices/>