

Chapitre 4

Exercices complémentaires

O. Thual, 15 novembre 2022

Sommaire

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Exercice sur le chapitre 1 | 2 |
| | Milieu très profond | 3 |
| | Cisaillement de deux couches infinies | 5 |
| | Tension superficielle et vagues | 8 |
| | Stabilité de l'écoulement de Poiseuille | 10 |
| 2 | Exercice sur le chapitre 2 | 10 |
| | Rouleaux et relation de dispersion | 11 |
| | Milieu poreux en rotation | 13 |
| | Convection thermohaline | 15 |
| 3 | Exercice sur le chapitre 3 | 15 |
| | Bifurcation noeud-col | 16 |
| | Bifurcation fourche imparfaite | 16 |
| | Bifurcation avec hysteresis | 17 |
| | Système dynamique et polynôme de degré trois | 18 |
| | Équations de Saint-Venant | 20 |

1 Exercice sur le chapitre 1

EXERCICE 4.1 Milieu très profond

On considère une couche fluide infiniment profonde dont la surface libre, d'équation $z = \eta(x, t)$, est en contact avec l'atmosphère de pression constante p_a . On suppose que le mouvement du fluide est décrit par les équations d'Euler incompressibles 2D

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - g \underline{e}_z, \quad (4.1)$$

où ρ est la masse volumique, $\underline{U}(x, z, t) = u \underline{e}_x + w \underline{e}_z$ est le champ de vitesse et $p(x, z, t)$ est le champ de pression.

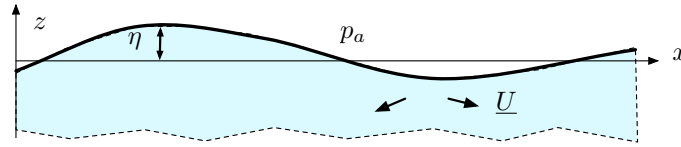


FIGURE 4.1 – Couche infiniment profonde à surface libre d'équation $z = \eta(x, t)$.

- 1) Interpréter les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w$ et $p = p_a$ en $z = \eta(x, t)$ et $\lim_{z \rightarrow -\infty} w = 0$.

La condition aux limites cinématique de surface énonce que la vitesse normale à la surface libre, d'équation $F(x, z, t) = z - \eta(x, t) = 0$, est égale à la vitesse normale de cette surface. Cette condition s'écrit $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} F = 0$ ou encore $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w$. La condition aux limites dynamique exprime l'égalité des forces de contacts qui sont des forces de pression. La condition cinématique $w = 0$ sur un fond plat est ici reportée à l'infini $z \rightarrow -\infty$.

- 2) Indiquer les étapes qui permettent de modéliser les petites oscillations irrotationnelles de la surface libre à l'aide du système d'équations $\operatorname{grad} \phi$, $\Delta \phi = 0$ et $p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ avec les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \eta$ en $z = 0$ et $\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$.

L'hypothèse irrotationnelle permet d'écrire le champ de vitesse sous la forme $\underline{U} = \operatorname{grad} \phi$ où $\phi(x, z, t)$ est le potentiel des vitesses. La condition $\operatorname{div} \underline{U} = 0$ s'écrit alors $\Delta \phi = 0$. L'équation de quantité de mouvement linéarisée $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - g \underline{e}_z$ s'intègre en $\frac{\partial \phi}{\partial t} + p/\rho + g z = p_a/\rho$, la constante d'intégration p_a/ρ pouvant être choisie ainsi dans la mesure où ϕ est défini à une constante $C(t)$ près. En développant les valeurs $f[x, \eta(x, t), t] = f(x, 0, t)[1 + O(\eta)]$ des champs en surface pour les petites oscillations, on peut appliquer les conditions aux limites en $z = 0$ plutôt qu'en $z = \eta(x, t)$. On linéarise alors ces conditions aux limites en utilisant $w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ et $p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p_a - \rho g z$.

- 3) Justifier la recherche de solutions de la forme $\phi = \Phi(z) e^{i k_x x - i \omega t}$ et $\eta = \eta_m e^{i k_x x - i \omega t}$ où $\Phi(z)$ et η_m sont complexes. Montrer que $\Phi(z) = \Phi_m \exp(k z)$ où $k = |k_x|$.

Les équations étant linéaires à coefficients réels, la partie réelle d'une solution complexe est aussi solution. Comme les coefficients sont constants, les solutions sont des exponentielles. On vérifie a posteriori que le taux de croissance temporel de ces ondes est nul. En reportant dans l'équation $\Delta \phi = 0$, on obtient $\Phi''(z) + k^2 \Phi(z) = 0$. En utilisant la condition aux limites en $-\infty$, on voit que $\Phi(z) = \Phi_m \exp(k z)$ où Φ_m est une amplitude complexe arbitraire.

- 4) En déduire la relation de dispersion $\omega = \pm \sqrt{g k}$ des ondes de surfaces en eaux profondes. Montrer que l'on peut choisir η_m réel sans perte de

généralité et exprimer la solution réelle sous la forme $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t)$ et $\phi = \frac{g\eta_m}{\omega} e^{kz} \sin(k_x x - \omega t)$. Montrer que les trajectoires de ces petites oscillations sont des cercles de centres (x_0, z_0) et de rayon $a(z_0)$ que l'on calculera. Quel est l'ordre de grandeur de la profondeur au-dessous de laquelle une houle de longueur d'onde L_x devient négligeable ?

Les conditions aux limites s'écrivent $-i\omega\eta_m = k\Phi_m$ et $-i\omega\Phi_m = -g\eta_m$. On en déduit que $\omega^2 = gk$ et $\Phi_m = -ig\eta_m/\omega$. On peut se ramener à η_m réel en changeant l'origine des x ou des t . La partie réelle de la solution complexe est alors de la forme indiquée. Comme $u = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ et $w = \frac{\partial\phi}{\partial z}$, la trajectoire de centre (x_0, y_0) est décrite par $x(x_0, z_0; t) = x_0 - a \sin(k_x x - \omega t)$ et $z(x_0, z_0; t) = z_0 + a \cos(k_x x - \omega t)$ où $a(z_0) = \eta_m \exp(kz_0)/\omega$ est le rayon du cercle. À la profondeur L_x , l'amplitude du mouvement a diminué d'un facteur $\exp(-2\pi) \sim 2 \cdot 10^{-3}$.

EXERCICE 4.2 Cisaillement de deux couches infinies

On considère la superposition de deux couches fluides incompressibles de masses volumiques respectives ρ_1 et ρ_2 avec $\rho_1 \geq \rho_2$. À l'équilibre, la couche la

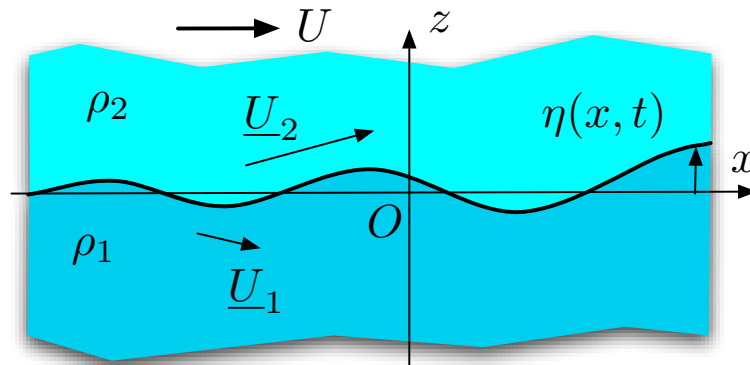


FIGURE 4.2 – Cisaillement de deux couches infinies avec la vitesse $U \underline{e}_x$.

plus lourde est au repos et occupe le demi-espace $z \leq 0$, tandis que la couche la plus légère est animée d'une vitesse constante $U \underline{e}_x$ dans le demi-espace $z \geq 0$ (Figure 4.2). On s'intéresse aux petites perturbations modélisées par les équations d'Euler 2D :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U}_2 = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_2}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_2 = -\frac{1}{\rho_2} \operatorname{grad} p_2 - g \underline{e}_z, \\ \operatorname{div} \underline{U}_1 = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_1 = -\frac{1}{\rho_1} \operatorname{grad} p_1 - g \underline{e}_z, \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $\underline{x} = x \underline{e}_x + z \underline{e}_z$ est le vecteur des coordonnées, $\underline{U}_1(\underline{x}, t) = u_1 \underline{e}_x + w_1 \underline{e}_z$ et $\underline{U}_2(\underline{x}, t) = u_2 \underline{e}_x + w_2 \underline{e}_z$ sont les champs de vitesses respectifs des deux couches et $p_1(\underline{x}, t)$ et $p_2(\underline{x}, t)$ leurs champs de pression. Le vecteur unitaire \underline{e}_z est vertical et g est l'intensité de la gravité.

- 1) D'où proviennent les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_1$, $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_2$ et $p_1 = p_2$ en $z = \eta(x, t)$? Quelles sont les conditions aux limites en $z = \pm\infty$?
- 2) Indiquer brièvement les étapes qui permettent de modéliser les petites oscillations irrotationnelles de la surface libre à l'aide du système d'équations $\underline{U}_1 = \operatorname{grad} \phi_1$, $\Delta \phi_1 = 0$, $\underline{U}_2 = \operatorname{grad} (Ux + \phi_2)$, $\Delta \phi_2 = 0$,

$p_1 = p_{r1} - \rho_1 g z - \rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t}$, $p_2 = p_{r2} - \rho_2 g z - \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)$. Comparer les constantes d'intégration p_{r1} et p_{r2} entre elles en considérant l'équilibre.

3) Justifier les conditions aux limites en $z = 0$ suivantes :

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g \eta \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g \eta \right), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}.$$

4) Justifier la recherche de solutions de la forme $\phi_1 = \Phi_1(z) e^{i k_x x + s t}$, $\phi_2 = \Phi_2(z) e^{i k_x x + s t}$ et $\eta = \eta_m e^{i k_x x + s t}$ où $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ et η_m sont complexes ainsi que $s = \sigma - i \omega$. Montrer que l'on peut écrire $\Phi_1(z) = \Phi_{1m} F_1(k z)$ et $\Phi_2(z) = \Phi_{2m} F_2(k z)$ avec $k = |k_x|$ où F_1 et F_2 sont deux fonctions que l'on explicitera.

5) En déduire la relation de dispersion généralisée s'écrit $\rho_1 [\gamma + s^2] = \rho_2 [\gamma - (s + i k_x U)^2]$ où γ est une constante que l'on déterminera.

6) En déduire que les racines sont de la forme

$$s = \beta \left[-i \rho_2 k_x U \pm \sqrt{\rho_1 \rho_2 k^2 U^2 - (\rho_1^2 - \rho_2^2) g k} \right]$$

où β est une constante que l'on déterminera.

7) Exprimer le taux de croissance σ pour une perturbation de longueur d'onde L_x lorsqu'elle conduit à une instabilité.

8) On suppose que $\rho_2 = 1040 \text{ kg/m}^3$ est la salinité de la Mer Rouge dont une couche de vitesse $U = 1 \text{ m/s}$ est mise en contact avec une couche dont la salinité $\rho_1 = 1440 \text{ kg/m}^3$ est celle de la Mer Morte. Estimez la taille caractéristique L_c des plus gros tourbillons que l'on voit se former lorsque les deux couches fluides se rencontrent. Calculez leur vitesse de propagation. On donne $g = 10 \text{ m/s}^2$.

9) On suppose que l'on observe, en plus des tourbillons de taille $L \leq L_c$, des structures d'extension horizontale plus grande que L_c . Quelle peut être la nature de ces structures ? À quelles vitesses se propagent-elles ?

Corrigé 4.2 Cisaillement de deux couches infinies

1) Les conditions aux limites cinématiques de surface énoncent que la vitesse normale à la surface libre, d'équation $F(x, z, t) = z - \eta(x, t) = 0$, est égale à la vitesse normale de cette surface. Cette condition s'écrit $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} F = 0$ ou encore $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_1$ pour le fluide du bas et $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_2$ pour le fluide du haut. La condition aux limites dynamique exprime l'égalité des forces de contacts qui sont des forces de pression. On a donc $p_1 = p_2$. La condition cinématique $w = 0$ sur un plan est ici reportée à l'infini. Elle s'écrit $w_1 = 0$ pour $z \rightarrow -\infty$. et $w_2 = 0$ pour $z \rightarrow \infty$.

2) L'hypothèse irrotationnelle permet d'écrire le champ de vitesse de la couche du bas sous la forme $\underline{U}_1 = \underline{\text{grad}} \phi_1$ où $\phi_1(x, z, t)$ est le potentiel des vitesses. La condition $\text{div} \underline{U}_1 = 0$ s'écrit alors $\Delta \phi_1 = 0$. Pour la couche du haut, on peut choisir $\underline{U}_2 = \underline{\text{grad}} (U x + \phi_2)$ de sorte que $\phi_2(x, z, t)$ soit le potentiel des écarts de vitesse au champ constant $U \underline{e}_x$. L'équation de quantité de mouvement linéarisée $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p - g \underline{e}_z$ s'intègre, pour la couche du bas, en $\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + p_1 + \rho_1 g z = p_{r1}$, la constante d'intégration p_{r1} pouvant être choisie de manière arbitraire dans la mesure où ϕ_1 est défini à une constante $C_1(t)$ près. Pour la couche du haut, on obtient de même $\rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) + p_2 + \rho_2 g z = p_{r2}$.

À l'équilibre, lorsque $\phi_1 = \phi_2$, la continuité du champ de pression impose $p_{r1} = p_{r2}$.

3) En développant les valeurs $f[x, \eta(x, t), t] = f(x, 0, t)[1 + O(\eta)]$ des champs en surface pour les petites oscillations, on peut appliquer les conditions aux limites en $z = 0$ plutôt qu'en $z = \eta(x, t)$. On linéarise alors les conditions aux limites cinématique à l'interface en utilisant $w_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}$ et $w_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}$. On écrit ensuite la condition aux limites dynamique $p_1 = p_2$ en $z = 0$ en ne négligeant pas η devant ϕ_1 et ϕ_2 .

4) Les équations étant linéaires à coefficients réels, la partie réelle d'une solution complexe est aussi solution. Comme les coefficients sont constants, les solutions sont des exponentielles. En reportant dans les équations $\Delta \phi_1 = 0$ et $\Delta \phi_2 = 0$, on obtient $\Phi_1''(z) - k^2 \Phi_1(z) = 0$ et $\Phi_2''(z) - k^2 \Phi_2(z) = 0$. En utilisant les conditions aux limites à l'infini, on voit que $\Phi_1(z) = \Phi_{1m} \exp(kz)$ et $\Phi_2(z) = \Phi_{2m} \exp(-kz)$ où Φ_{1m} et Φ_{2m} sont des amplitudes complexes arbitraires. On a donc $F_1(Z) = e^Z$ et $F_2(Z) = e^{-Z}$.

5) En utilisant $\Phi_1'(0) = k \Phi_{1m}$ et $\Phi_2'(0) = -k \Phi_{2m}$, les conditions aux limites cinématiques en $z = 0$ s'écrivent $s \eta_m = k \Phi_{1m}$ et $(s + i k_x U) \eta_m = -k \Phi_{2m}$. La condition aux limites dynamique s'écrit $\rho_1 [g k \eta_m + s \Phi_{1m}] = \rho_2 [g k \eta_m + (s + i k_x U) \Phi_{1m}]$. En éliminant Φ_{1m} et Φ_{2m} et en écartant la solution triviale $\eta_m = 0$, on en déduit $\rho_1 [g k + s^2] = \rho_2 [g k - (s + i k_x U)^2]$. On a donc $\gamma = g k$.

6) Le discriminant réduit de l'équation $(\rho_1 + \rho_2) s^2 + 2 i \rho_2 k_x U s + (\rho_1 - \rho_2) g k - \rho_2 k^2 U = 0$ s'écrit $\Delta' = -\rho_2 k^2 U^2 - (\rho_1^2 - \rho_2^2) g k + \rho_2 (\rho_1 + \rho_2) k^2 U = \rho_1 \rho_2 k^2 U - (\rho_1^2 - \rho_2^2) g k$. Les racines ont bien la forme indiquée avec $\beta = 1/(\rho_1 + \rho_2)$.

7) Le taux de croissance s'écrit $\sigma = \sqrt{\rho_1 \rho_2 k^2 U^2 - (\rho_1^2 - \rho_2^2) g k} / (\rho_1 + \rho_2)$ avec $k = 2\pi/L_x$.

8) Seules les perturbations de longueur d'onde $L \leq L_c$ avec $L_c = \frac{2\pi}{g} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} U^2 \sim 0,95$ m sont instables. Les plus gros tourbillons, de taille voisine de L_c , se propagent à la vitesse de phase $c_\varphi = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} U \sim 0,4$ m/s.

9) Les structures de tailles $L \geq L_c$ sont des ondes de gravité de vitesse de phase $c_\varphi = \beta \left[-\rho_2 U \pm \sqrt{-\rho_1 \rho_2 U^2 + (\rho_1^2 - \rho_2^2) g/k} \right]$. Il faudrait également calculer la vitesse de groupe pour rendre compte de l'observation de la propagation de paquets d'ondes.

EXERCICE 4.3 Tension superficielle et vagues

Si R est le rayon de courbure de l'interface $z = \eta(x, t)$ délimitant deux fluides non miscibles, la tension superficielle induit une différence de pression $p_2 - p_1 = T/R$ où T est une constante, $p_2 = p|_{z=\eta^+}$ et $p_1 = p|_{z=\eta^-}$ (figure 4.3). Lorsque η est petit, cette condition s'écrit

$$p_2 - p_1 = T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad \text{en } z = \eta(x, t). \quad (4.3)$$

On suppose ici que le deux fluides sont incompressible de masses volumiques

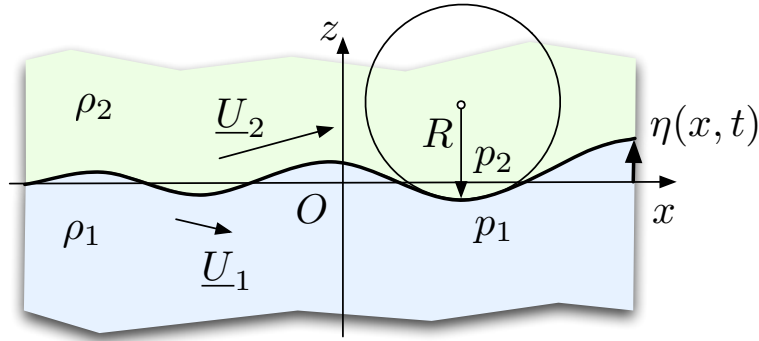


FIGURE 4.3 – Interface de deux couches infinies en prenant en compte la tension superficielle.

respectives ρ_1 et ρ_2 avec $\rho_1 \geq \rho_2$. À l'équilibre, la couche la plus lourde est au repos et occupe le demi-espace $z \leq 0$. On s'intéresse aux petites perturbations modélisées par les équations d'Euler 2D :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U}_2 = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_2}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_2 = -\frac{1}{\rho_2} \operatorname{grad} p_2 - g \underline{e}_z, \\ \operatorname{div} \underline{U}_1 = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_1 = -\frac{1}{\rho_1} \operatorname{grad} p_1 - g \underline{e}_z, \end{aligned} \quad (4.4)$$

où $\underline{x} = x \underline{e}_x + z \underline{e}_z$ est le vecteur des coordonnées, $\underline{U}_1(\underline{x}, t) = u_1 \underline{e}_x + w_1 \underline{e}_z$ et $\underline{U}_2(\underline{x}, t) = u_2 \underline{e}_x + w_2 \underline{e}_z$ sont les champs de vitesses respectifs des deux couches et $p_1(\underline{x}, t)$ et $p_2(\underline{x}, t)$ leurs champs de pression. Le vecteur unitaire \underline{e}_z est vertical et g est l'intensité de la gravité.

- 1) D'où proviennent les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_1$, $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_2$ et $p_1 = p_2 - T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ en $z = \eta(x, t)$? Justifier les conditions aux limites $w_1 = 0$ en $z = -\infty$ et $w_2 = 0$ en $z = \infty$.
- 2) Indiquer brièvement les étapes qui permettent de modéliser les petites oscillations irrotationnelles de la surface libre à l'aide du système d'équations $\underline{U}_1 = \operatorname{grad} \phi_1$, $\Delta \phi_1 = 0$, $\underline{U}_2 = \operatorname{grad} \phi_2$, $\Delta \phi_2 = 0$, $p_1 = p_{r1} - \rho_1 g z - \rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t}$, $p_2 = p_{r2} - \rho_2 g z - \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t}$. Comparer les constantes d'intégration p_{r1} et p_{r2} entre elles.
- 3) Justifier les conditions aux limites $\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g \eta \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + g \eta \right) + T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}$ en $z = 0$.
- 4) Justifier la recherche de solutions de la forme $\phi_1 = \Phi_1(z) e^{i k_x x + s t}$, $\phi_2 = \Phi_2(z) e^{i k_x x + s t}$ et $\eta = \eta_m e^{i k_x x + s t}$ où $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ et η_m sont complexes. Montrer que l'on peut écrire $\Phi_1(z) = \Phi_{1m} F_1(k z)$ et $\Phi_2(z) = \Phi_{2m} F_2(k z)$ avec $k = |k_x|$ où F_1 et F_2 sont deux fonctions que l'on explicitera.
- 5) En déduire la relation de dispersion s'écrit $\rho_1 (\gamma + s^2) = \rho_2 (\gamma - s^2) - T k^3$ où γ est une constante que l'on déterminera.
- 6) En déduire que les racines sont de la forme $s = \pm i \omega$ avec

$$\omega = \sqrt{\tilde{g}(k) k \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}}$$

où $\tilde{g}(k)$ est une fonction de k que l'on exprimera.

- 7) Exprimer la relation de dispersion des ondes de surface dans le cas $\rho_1 \gg \rho_2$.

- 8) Lorsque la couche supérieure est animée d'une vitesse moyenne U_2 , la relation de dispersion dans le cas $T = 0$ (pas de tension superficielle) est

$$\rho_1 \left[g k + \frac{s^2}{\tanh(k h_r)} \right] = \rho_2 [g k - (s + i k_x U_2)^2] .$$

Comment cette relation se généralise-t-elle au cas $T \neq 0$ (prise en compte de la tension superficielle).

- 9) Dans le cas de l'interface air-eau, on mesure $T = 7 \cdot 10^{-2}$ N/m. En déduire l'ordre de grandeur des longueurs d'onde à partir desquelles on peut négliger la tension superficielle. On pourra prendre $\rho_1 = 1000$ kg/m³ et $g = 10$ m/s².

Corrigé 4.3 Tension superficielle et vagues

1) Les conditions aux limites cinématiques de surface énoncent que la vitesse normale à la surface libre, d'équation $F(x, z, t) = z - \eta(x, t) = 0$, est égale à la vitesse normale de cette surface. Cette condition s'écrit $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } F = 0$ ou encore $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_1$ pour le fluide du bas et $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_2$ pour le fluide du haut. La condition aux limites dynamique exprime le saut de pression dû à la tension superficielle. La condition cinématique $w = 0$ sur un plan est ici reportée à l'infini. Elle s'écrit $w_1 = 0$ pour $z \rightarrow -\infty$. et $w_2 = 0$ pour $z \rightarrow \infty$.

2) L'hypothèse irrotationnelle permet d'écrire le champ de vitesse de la couche du bas sous la forme $\underline{U}_1 = \text{grad } \phi_1$ où $\phi_1(x, z, t)$ est le potentiel des vitesses. La condition $\text{div } \underline{U}_1 = 0$ s'écrit alors $\Delta \phi_1 = 0$. Pour la couche du haut, on a de même $\underline{U}_2 = \text{grad } \phi_2$. L'équation de quantité de mouvement linéarisée $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \underline{e}_z$ s'intègre, pour la couche du bas, en $\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + p_1 + \rho_1 g z = p_{r1}$, la constante d'intégration p_{r1} pouvant être choisie de manière arbitraire dans la mesure où ϕ_1 est défini à une constante $C_1(t)$ près. Pour la couche du haut, on obtient de même $\rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + p_2 + \rho_2 g z = p_{r2}$. À l'équilibre, lorsque $\phi_1 = \phi_2$, le champ de pression est continu (car $\eta = 0$) et l'on a donc $p_{r1} = p_{r2}$.

3) En développant les valeurs $f[x, \eta(x, t), t] = f(x, 0, t)[1 + O(\eta)]$ des champs en surface pour les petites oscillations, on peut appliquer les conditions aux limites en $z = 0$ plutôt qu'en $z = \eta(x, t)$. On linéarise alors les conditions aux limites cinématiques à l'interface en utilisant $w_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}$ et $w_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}$. On écrit ensuite la condition aux limites dynamique $p_1 = p_2$ en $z = 0$ en ne négligeant pas η devant ϕ_1 et ϕ_2 .

4) Les équations étant linéaires à coefficients réels, la partie réelle d'une solution complexe est aussi solution. Comme les coefficients sont constants, les solutions sont des exponentielles. En reportant dans les équations $\Delta \phi_1 = 0$ et $\Delta \phi_2 = 0$, on obtient $\Phi_1''(z) - k^2 \Phi_1(z) = 0$ et $\Phi_2''(z) - k^2 \Phi_2(z) = 0$. En utilisant les conditions aux limites à l'infini, on voit que $\Phi_1(z) = \Phi_{1m} \exp(kz)$ et $\Phi_2(z) = \Phi_{2m} \exp(-kz)$ où Φ_{1m} et Φ_{2m} sont des amplitudes complexes arbitraires. On a donc $F_1(Z) = e^Z$ et $F_2(Z) = e^{-Z}$.

5) En utilisant $\Phi_1'(0) = k \Phi_{1m}$ et $\Phi_2'(0) = -k \Phi_{2m}$, les conditions aux limites cinématiques en $z = 0$ s'écrivent $s \eta_m = k \Phi_{1m}$ et $s \eta_m = -k \Phi_{2m}$. La condition aux limites dynamique s'écrit $\rho_1 [g k \eta_m + s \Phi_{1m}] = \rho_2 [g k \eta_m + s \Phi_{1m}] -$

$T k_x^2 \eta_m$. En éliminant Φ_{1m} et Φ_{2m} et en écartant la solution triviale $\eta_m = 0$, on en déduit $\rho_1 (gk + s^2) = \rho_2 (gk - s^2) - T k^3$. On a donc $\gamma = gk$.

6) On en déduit la relation de dispersion exprimée avec $\tilde{g}(k) = g + \frac{T}{\rho_1 - \rho_2} k^2$.

7) Dans le $\rho_1 \gg \rho_2$, on a $\omega = \sqrt{\tilde{g}(k)k}$ avec $\tilde{g}(k) = g + \frac{T}{\rho_1} k^2$.

8) En reprenant les étapes du calcul, on voit qu'il suffit de remplacer g par $\tilde{g}(k) = g + \frac{T}{\rho_1 - \rho_2} k^2$ dans la relation de dispersion.

9) On peut négliger la tension superficielle lorsque $g \gg \frac{T}{\rho_1} k^2$, c'est-à-dire pour des longueurs d'ondes $l = 2\pi/k$ telles que $l \gg l_c$ avec $l_c = 2\pi \sqrt{\frac{T}{g\rho_1}} \sim 1.7$ cm.

EXERCICE 4.4 Stabilité de l'écoulement de Poiseuille

On considère un fluide pesant de masse volumique ρ compris entre deux plaques planes horizontales délimitant les frontières $z = -h$ et $z = h$. On note $\underline{g} = -g \underline{e}_z$ le champ de gravité. On suppose que le mouvement de ce fluide est régi par le modèle des équations de Navier-Stokes incompressibles : $\text{div } \underline{U} = 0$, $d\underline{U}/dt = -\text{grad } \Pi - g \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}$, où g est la gravité, $p = \rho \Pi$ est le champ de pression et ν la viscosité cinématique. On suppose que le mouvement est 2D avec $\underline{U}(x, z, t) = u \underline{e}_x + w \underline{e}_z$. Les conditions aux limites sur les deux parois s'écrivent $u(x, h, t) = w(x, h, t) = 0$ et $u(x, -h, t) = w(x, -h, t) = 0$.

- 1) On considère le profil de vitesse $\underline{U}_e = U(z) \underline{e}_x$ avec $U(z) = U_0 [1 - (z/h)^2]$. Calculer la dérivée particulière $d\underline{U}_e/dt$ et tracer le profil $U(z)$.
- 2) Calculer le champ $\Pi_e(x, z)$ tel que (\underline{U}_e, Π_e) soit un équilibre du modèle en supposant que $\Pi_e(0, 0) = U_0^2$.
- 3) On définit les variables adimensionnées par $\underline{x} = h \underline{x}^*$, $\underline{U} = U_0 \underline{U}^*$, $t = (h/U_0) t^*$ et $\Pi = U_0^2 \Pi^*$. Écrire les équations de Navier-Stokes adimensionnées en faisant apparaître le nombre de Reynolds $Re = U_0 h/\nu$ et le nombre de Froude $Fr = U_0/\sqrt{gh}$. On pourra omettre les $*$ pour présenter le résultat final.
- 4) Écrire les conditions aux limites ainsi que $\underline{U}_e = U(z) \underline{e}_x$ et $\Pi_e(x, z)$ après adimensionnalisation, les $*$ étant omises désormais dans toutes les expressions.
- 5) Pour ces équations adimensionnées, on note $u = U(z) + \tilde{u}(x, z, t)$, $w = \tilde{w}(x, z, t)$ et $\Pi = \Pi_e(x, z) + \tilde{\Pi}(x, z, t)$ où \tilde{u} , \tilde{w} et $\tilde{\Pi}$ sont des petites perturbations. Écrire les équations linéarisées du modèle en ne conservant que les termes dominants.
- 6) Justifier l'existence d'une fonction $\psi(x, z, t)$ telle que $\tilde{u} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $\tilde{w} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Comment se nomme-t-elle ?
- 7) Montrer que l'élimination de la pression conduit à l'équation d'Orr-Sommerfeld

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + a_1 U(z) \frac{\partial}{\partial x} \right] \Delta \psi - a_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} U''(z) = a_3 Re^{-1} \Delta^2 \psi$$

où a_1 , a_2 et a_3 sont des constantes dont on indiquera la valeur.

- 8) Expliciter les conditions aux limites à l'aide de ψ .

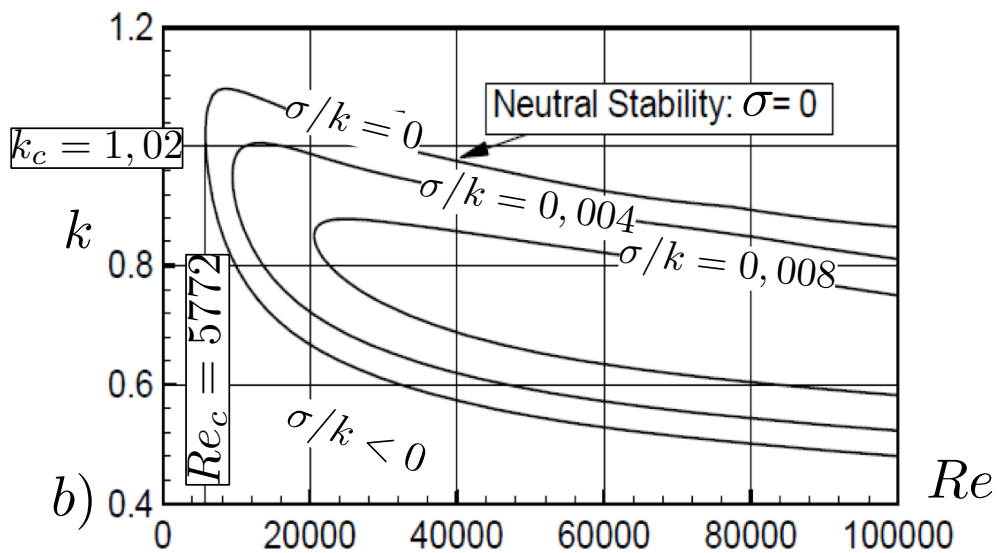
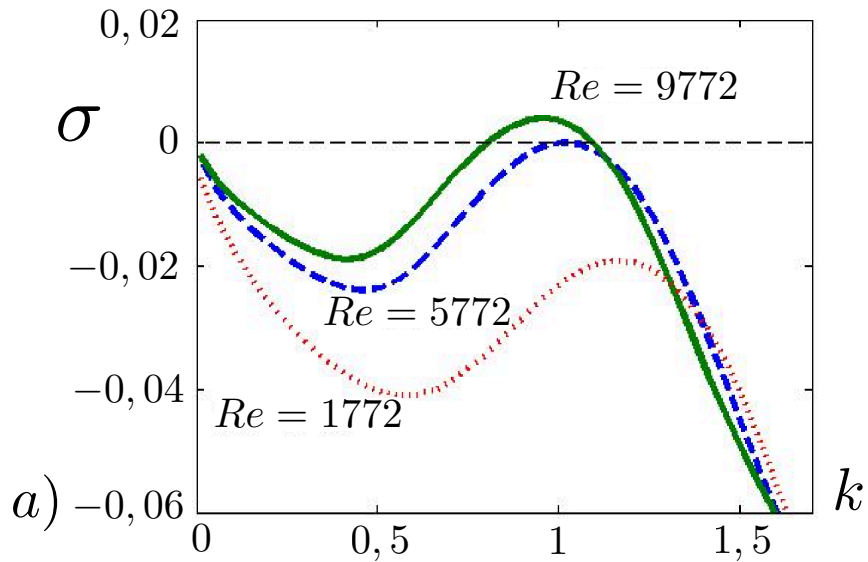


FIGURE 4.4 – a) Taux de croissance σ en fonction du nombre d'onde k . b) Iso-contours positifs de σ/k dans le plan (Re, k) .

- 9) Justifier la recherche de solutions de l'équation d'Orr-Sommerfeld sous la forme $\psi(x, z, t) = \Psi(z) \exp(ikx + st)$ où $s = \sigma - i\omega \in \mathcal{C}$.
- 10) Montrer que $\Psi(z)$ vérifie l'équation du quatrième ordre

$$\left[\frac{\sigma}{k} + i \left(1 - z^2 - \frac{\omega}{k} \right) \right] (D^2 - k^2)\Psi(z) + i a_4 \Psi(z) = \frac{1}{k Re} (D^2 - k^2)^2 \Psi(z),$$

où $D = d/dz$ et a_4 est une constante que l'on précisera. Écrire les conditions aux limites vérifiées par $\Psi(z)$ en $z = \pm 1$.

- 11) Les taux de croissance $\sigma = \Sigma(k, Re)$ obtenus en résolvant numériquement cette équation avec ses conditions aux limites sont représentés sur la figure 4.4. Discuter la stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan en fonction de la valeur du nombre de Reynolds.

- 12) Au voisinage du seuil de l'instabilité, les modes instables sont appelés "ondes de Tollmien-Schlichting". Exprimer leur longueur d'onde l_c en fonction de la longueur h .
- 13) La déstabilisation de l'écoulement de Poiseuille est-elle une bifurcation super-critique ou sous-critique ?

Corrigé 4.4 Stabilité de l'écoulement de Poiseuille

1) On a $\frac{dU_e}{dt} = 0$ et le tracé de $U(z)$ est un parabole. **2)** On a $\Pi_e(x, z) = \Pi_r - 2\nu U_0 x/h^2 - g z$. **3)** En omettant les *, on obtient $\text{div } \underline{U} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = -\text{grad } \Pi - Fr^{-2} \underline{e}_z + Re^{-1} \Delta \underline{U}$. **4)** Les conditions aux limites adimensionnées s'écrivent $u(x, 1, t) = w(x, 1, t) = 0$ et $u(x, -1, t) = w(x, -1, t) = 0$. L'équilibre s'écrit $\underline{U}_e = U(z) \underline{e}_x$ avec $U(z) = (1 - z^2)$ et $\Pi_e = 1 - 2Re^{-1} x - Fr^{-2} z$. **5)** En remarquant que les termes d'ordre zéro s'annulent et en négligeant les termes d'ordre deux, on obtient $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U(z) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{w} U'(z) = -\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial x} - Re^{-1} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \tilde{u}$ et $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + U(z) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial z} - Re^{-1} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \tilde{w}$. **6)** L'incompressibilité justifie le choix d'une fonction de courant. **7)** En dérivant par $-\frac{\partial}{\partial z}$ l'équation pour \tilde{u} , par $\frac{\partial}{\partial x}$ l'équation pour \tilde{w} puis en les sommant, on obtient l'équation indiquée pour $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. **8)** On a $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$ pour $z = \pm 1$. **9)** On cherche des solutions sous cette forme dans la mesure où le système est invariant par translations en x et en t , mais pas en z . **10)** Comme $U'' = -2$, on a $a_4 = 2$. Les conditions aux limites sont $\Psi = D\Psi = 0$ en $z = \pm 1$. **11)** L'écoulement est stable jusqu'au seuil $Re_c = 5772$. **12)** Comme $k_c = 1,02$, on a $l_c = 2\pi h/k_c \sim 6,16 h$. **13)** Comme pour tous les écoulements parallèles, la bifurcation est sous-critique.

2 Exercice sur le chapitre 2

EXERCICE 4.5 Rouleaux et relation de dispersion

On considère un champ de vitesse 2D défini par la fonction de courant $\psi(x, y, t)$ à l'aide des relations $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. On suppose que ψ est solution d'une équation aux dérivées partielles linéarisée autour d'un équilibre dont les coefficients sont réels et constants en espace et en temps.

- 1) En l'absence de conditions aux limites, c'est-à-dire dans un milieu infini, justifier la recherche de solutions bornées en espace de la forme $\psi = \Psi_m e^{i k_x x} e^{i k_z z} e^{s t}$ où Ψ_m est une amplitude complexe.
- 2) On suppose que la relation de dispersion généralisée est de la forme $s = \Sigma(k)$ où $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ est le module du vecteur d'onde $\underline{k} = k_x \underline{e}_x + k_z \underline{e}_z$ et $\Sigma(k)$ une fonction réelle. Quelles conditions doit vérifier la fonction Σ pour que l'équilibre soit stable ?
- 3) On suppose maintenant que ψ doit vérifier les conditions aux limites $\psi(x, 0) = 0$ et $\psi(x, d) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on peut trouver une solution réelle du problème avec conditions aux limites de la forme

$$\psi(x, z, t) = A \exp(st) \cos(k_x x) \sin(n \pi z/d)$$

où $A \in \mathbb{R}$ et n est un entier quelconque avec $s = \Sigma(k)$. Détailler le raisonnement permettant d'affirmer que ψ est bien une solution.

- 4) Tracer les lignes de champ du champ de vitesse ainsi obtenues dans le cas $n = 1$.
- 5) Tracer, pour ce même cas, les vecteurs vitesses sur le même graphe en supposant $A > 0$.

Corrigé 4.5 Rouleaux et relation de dispersion

1) Comme le système d'équations aux dérivées partielles est invariant par les translations d'espace et de temps, on sait que les modes propres sont de la forme indiquée. Comme les coefficients sont réels et que le système est linéaire, la partie réelle d'une solution complexe est solutions.

2) Pour que l'équilibre étudié soit stable, il faut que la partie réelle de Σ soit strictement négative pour tous les modes, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de k .

3) Les fonctions $\phi_+ = \frac{1}{2i} A e^{i k_x x} e^{i \pi z} e^{\Sigma(k) t}$ et $\phi_- = -\frac{1}{2i} A e^{i k_x x} e^{-i \pi z} e^{\Sigma(k) t}$ sont des solutions complexes élémentaires dans la mesure où les vecteurs d'ondes $\underline{k}_+ = k_x \underline{e}_x + k_z \underline{e}_z$ et $\underline{k}_- = k_x \underline{e}_x - k_z \underline{e}_z$ ont le même module. Leur somme est égale à la fonction $\psi = A e^{\Sigma(k) t} \cos(k_x x) \sin(\pi z)$ qui est donc solution du problème linéaire. On peut donc choisir A réel et $A(t) = A e^{\Sigma(k) t}$.

4) Les isolignes sont celles des rouleaux de convection : des cercles au centre, des carrés aux frontières et une transformation de cercles en carrés au milieu (voir figure ??). La période en x est $L_x = 2\pi/k_x$. La hauteur en z est de 1. Les maxima et minima de ψ alternent tous les $L_x/2$ dans la direction x .

5) En supposant $A > 0$, le champ de vitesse $\underline{U} = -\underline{e}_y \wedge \text{grad } \psi$ tourne dans le sens trigonométrique autour des maxima de ψ et dans le sens horaire autour de ses minima.

PROBLÈME 4.6 Milieu poreux en rotation

On considère un fluide pesant s'écoulant dans un milieu poreux d'extension infini (éloigné de toute frontière). On note $\underline{g} = -g \underline{e}_z$ le champ de gravité. L'ensemble du dispositif est soumis à une rotation uniforme d'axe vertical $\underline{\Omega}_0 = \Omega_0 \underline{e}_z$. On suppose que la température du fluide est constante et que le mouvement de ce fluide, dans le repère tournant, est régi par le modèle :

$$\frac{d\underline{U}}{dt} + 2 \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho_r} \text{grad } p - g \underline{e}_z - \beta \underline{U}, \quad (4.5)$$

où β est une constante positive rendant compte du frottement du milieu poreux (loi de Darcy). On note $\underline{U}(x, y, z, t) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z$ et $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad}$ (dérivée particulaire).

- 1) Montrer le repos $\underline{U} = \underline{0}$ est une solution du problème. Expliciter, pour cet équilibre, le champ de pression $p_c(z)$ associé en supposant que $p_c(0) = p_r$.

- 2) On pose $p(\underline{x}, t) = p_c(z) + \rho_r \Pi(\underline{x}, t)$. Montrer que les équations du modèle linéarisées autour du repos peuvent s'écrire $\text{div } \underline{U} = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + 2\Omega_0 \underline{e}_z \wedge \underline{U} = -\text{grad } \Pi - \beta \underline{U}$.
- 3) On choisit d'adimensionnaliser les équations avec les unités $[L] = g/(4\Omega_0^2)$, $[\tau] = 1/(2\Omega_0)$, $[U] = [L]/[\tau]$ et $[\Pi] = [U]^2$. Écrire les équations du modèle linéarisé ainsi adimensionnées en mettant en évidence le nombre sans dimension $E = \beta/(2\Omega_0)$.
- 4) On note désormais les grandeurs adimensionnées avec les mêmes notations que celles des grandeurs physiques. On s'intéresse aux petits mouvements quasi-2D définis par

$$\underline{U} = u(x, z, t) \underline{e}_x + v(x, z, t) \underline{e}_y + w(x, z, t) \underline{e}_z \quad \text{et} \quad \Pi = \Pi(x, z, t). \quad (4.6)$$

Écrire les équations adimensionnées pour les composantes u , v et w .

- 5) Justifier, sans démonstration, l'existence d'une fonction de courant $\psi(x, z, t)$ telle que

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.7)$$

- 6) En déduire que le système peut s'écrire sous la forme $\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = -A_1 \frac{\partial}{\partial z} v - A_2 \Delta \psi$ et $\frac{\partial}{\partial t} v = A_3 \frac{\partial}{\partial z} \psi - A_4 v$ où A_1 , A_2 , A_3 et A_4 sont des constantes que l'on déterminera.
- 7) On cherche des solutions complexes de la forme

$$[\psi(x, z, t), v(x, z, t)] = [\Psi_m, V_m] e^{i k_x x + i k_z z + s t}, \quad (4.8)$$

où Ψ_m et V_m sont des constantes complexes. Justifier la recherche de solutions sous cette forme.

- 8) En déduire la relation de dispersion généralisée des perturbations de l'état de repos. Montrer que l'on peut écrire $s = -A_5 \pm i \Omega(k_x, k_z)$ où A_5 est une constante que l'on précisera.
- 9) On note $\theta(k_x, k_z)$ l'angle défini par $k_x = k \cos \theta$, $k_z = k \sin \theta$ et $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$. Exprimer $\Omega(k_x, k_z)$ en fonction de $\theta(k_x, k_z)$.
- 10) Le repos est-il stable ou instable vis-à-vis des petites perturbations?
- 11) Tracer très schématiquement une composante de vitesse en fonction du temps pour un point quelconque dans le cas $k_x = k_z$ et $E = 1$.

Corrigé 4.6 Milieu poreux en rotation

1) On a $p_c(z) = p_1 - \rho_r g z$. **2)** En remplaçant dans les équations, les termes $-\text{grad } p_c/\rho_r - g \underline{e}_z = 0$ disparaissent. Il suffit ensuite de négliger le terme $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$. **3)** En utilisant les mêmes notations que pour les grandeurs avec dimensions, les équations adimensionnalisées s'écrivent $\text{div } \underline{U} = 0$, $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{e}_z \wedge \underline{U} = -\text{grad } \Pi - E \underline{U}$. **4)** Dans le cas quasi-2D, le modèle s'écrit $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} - v = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} - E u$, $\frac{\partial v}{\partial t} + u = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} - E v$, $\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} - E w$. **5)** Les champs de vitesse 2D incompressibles s'écrivent à l'aide d'une fonction de courant. **6)** En multipliant l'équation en $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ par $-\frac{\partial}{\partial z}$ et l'équation en $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ par $\frac{\partial}{\partial x}$ puis en les sommant, on obtient $A_1 = 1$ et $A_2 = E$. De plus, $A_3 = 1$ et

$A_4 = E$. **7)** Comme les équations sont linéaires à coefficients réelles, on peut chercher des solutions complexes et prendre ensuite leur partie réelle. La forme des solutions recherchées est justifiée par l'invariance du problème par les translations en temps et en espace, dans toutes les directions. **8)** En reportant dans les équations, on obtient $(s + E)(-k^2) \Psi_m = -i k_z V_m$ et $(s + E) V_m = i k_z \Psi_m$ avec $k^2 = k_x^2 + k_z^2$. On en déduit la relation de dispersion généralisée $(s + E)^2 = -k_z^2/k^2$ et donc $s = -E \pm i \Omega(k_x, k_z)$ avec $\Omega(k_x, k_z) = k_z/k = k_z/\sqrt{k_x^2 + k_z^2}$. **9)** On a $\Omega(k_x, k_z) = \sin \theta(k_x, k_z)$. **10)** Le repos est toujours stable car $\text{Re}(s) = -E < 0$. **11)** La vitesse en un point est proportionnelle à la fonction $f(t) = e^{-t} \cos(t/\sqrt{2} + \varphi)$ on φ est une phase. Il s'agit d'une sinusoïde qui décroît fortement au bout d'une période.

EXERCICE 4.7 Convection thermohaline

La convection thermohaline est le mouvement induit par les changements de masse volumique dus aux variations de température et de concentration de sel dans l'eau. On décrit ici ces mouvements de convection par le modèle

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{U} &= 0, & \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_r} \text{grad } p - \frac{\rho}{\rho_r} g \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}, \\ \frac{\rho}{\rho_r} &= 1 - \alpha(T - T_r) + \beta(S - S_r), & \frac{dT}{dt} &= \kappa_T \Delta T, & \frac{dS}{dt} &= \kappa_S \Delta S, \end{aligned} \quad (4.9)$$

où \underline{U} est le champ de vitesse, T le champ de température, S le champ de salinité et p le champ de pression. Les coefficients de diffusivité de la température et de la salinité sont respectivement κ_T et κ_S . Les coefficients de dilatation dus à la température et à la salinité sont respectivement $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On a noté ρ_r , T_r et S_r des constantes de référence. La gravité g est dans la direction Oz .

On s'intéresse aux rouleaux de convection qui se développent dans une couche fluide comprise entre deux plaques planes d'équations respectives $z = 0$ et $z = d$ où d est l'épaisseur de la couche. Le forçage du mouvement est induit par les conditions aux limites $(T, S) = (T_1, S_1)$ en $z = 0$ et $(T, S) = (T_2, S_2)$ en $z = d$ avec $T_1 > T_2$ et $S_1 > S_2$. On suppose que les champs sont indépendants de y et que la vitesse v dans cette direction est nulle. On suppose des conditions aux limites sans glissement pour la vitesse, c'est-à-dire $w = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

- 1) Calculer les profils conductifs $T_c(z)$ et $S_c(z)$ obtenus dans le cas $\underline{U} = \underline{0}$.
En déduire

$$\begin{aligned} p_c &= p_r - \rho_r g z + \rho_r \alpha g (T_1 - T_r) z - \rho_r \alpha g \frac{T_1 - T_2}{2d} z^2 \\ &\quad - \rho_r \beta g (S_1 - S_r) z + \rho_r \beta g \frac{S_1 - S_2}{2d} z^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

On a $T_c = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{d} z$ et $S_c = S_1 - \frac{S_1 - S_2}{d} z$. Comme $\rho_c = 1 - \alpha(T_c - T_r) + \beta(S_c - S_r)$ et $p'_c(z) = -\rho_r g \rho_c(z)$, on en déduit l'expression de $p_c(z)$ indiquée.

- 2) On pose $T = T_c(z) + \theta(x, z, t)$ et $S = S_c(z) + \Sigma(x, z, t)$ et $p = p_c(z) + \rho_r \Pi(x, t)$. Exprimer, à l'aide de ces nouvelles variables, les équations du modèle avec ses conditions aux limites.

Les équations du modèle se mettent sous la forme $\text{div } \underline{U} = 0$, $\frac{d\underline{U}}{dt} = -\text{grad } \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z - \beta g \Sigma \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{d} w + \kappa_T \Delta \theta$, $\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{S_1 - S_2}{d} w + \kappa_S \Delta \Sigma$ avec les conditions aux limites $\theta = 0$, $\Sigma = 0$, $w = 0$ et $\frac{du}{dz} = 0$ en $z = 0$ et $z = d$.

- 3) On choisit d comme unité de longueur, d^2/κ_T comme unité de temps, $T_1 - T_2$ comme unité de température et $S_1 - S_2$ comme unité de salinité. Écrire les équations adimensionnées à l'aide des nombres sans dimension

$$R_T = \frac{\alpha g d^3 (T_1 - T_2)}{\nu \kappa_T}, \quad R_S = \frac{\beta g d^3 (S_1 - S_2)}{\nu \kappa_S},$$

$$P = \frac{\nu}{\kappa_T} \quad \text{et} \quad L = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}$$

respectivement appelés "Rayleigh thermique", "Rayleigh salin", "Prandtl" et "Lewis".

On pose $x = dx_*$, $z = dz_*$, $t = (d^2/\kappa_T)t_*$, $u = (\kappa_T/d)u_*$, $w = (\kappa_T/d)w_*$, $\theta = (T_1 - T_2)\theta_*$, $\Sigma = (S_1 - S_2)\Sigma_*$ et $\Pi = (\kappa_T^2/d^2)\Pi_*$. En remplaçant dans les équations du modèle puis en omettant les indices *, on obtient $\text{div } \underline{U} = 0$, $\frac{d\underline{U}}{dt} = -\text{grad } \Pi + R_T P \theta \underline{e}_z - R_S P L^{-1} \Sigma \underline{e}_z + P \Delta \underline{U}$, $\frac{d\theta}{dt} = w + \Delta \theta$, et $\frac{d\Sigma}{dt} = w + L^{-1} \Delta \Sigma$.

- 4) On s'intéresse aux petites perturbations de l'équilibre. Montrer que l'on peut mettre le système sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = R_T P \frac{\partial \theta}{\partial x} - R_S P L^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} + P \Delta^2 \psi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + L^{-1} \Delta \Sigma.$$

On peut tout d'abord négliger les termes non linéaires en $\underline{U} \cdot \text{grad}$. On définit une fonction courant ψ par les relations $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. En prenant le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement, on obtient l'équation pour $\Delta \psi$ indiquée.

- 5) On cherche des solutions complexes du modèle linéarisé sous la forme

$$(\psi, \theta, \Sigma) = (\psi_m, \theta_m, \Sigma_m) e^{i(k_x x + k_z z) + s t} \quad (4.11)$$

où $(\psi_m, \theta_m, \Sigma_m)$ sont trois amplitudes complexes, $\underline{k} = k_x \underline{e}_x + k_z \underline{e}_z$ un vecteur d'onde réel et $s = \sigma - i\omega$ une valeur propre complexe. Montrer que s doit être la racine de l'équation

$$s k^2 P^{-1} = A k_x^2 (s + k^2)^{-1} - B k_x^2 (s L + k^2)^{-1} - k^4, \quad (4.12)$$

où A et B sont des constantes que l'on explicitera. En déduire que les valeurs propres s sont les racines d'un polynôme d'ordre 3 (qu'il n'est pas nécessaire de développer).

Le système linéaire peut se mettre sous la forme $-s k^2 \psi_m = R_T P i k_x \theta_m - R_S P L^{-1} i k_x \Sigma_m + P k^4 \psi_m$, $s \theta_m = i k_x \psi_m - k^2 \theta_m = 0$ et $s \Sigma_m = i k_x \psi_m - L^{-1} k^2 \Sigma_m = 0$. En annulant le déterminant de ce système, on obtient $s k^2 P^{-1} = R_T k_x^2 (s + k^2)^{-1} - R_S k_x^2 (s L + k^2)^{-1} - k^4$. Donc $A = R_T$ et $B = R_S$.

- 6) Montrer que $s = 0$ est une racine de ce polynôme lorsque $R_T - R_S = F(k_x, k_z)$ où F est une fonction que l'on explicitera. Dans le cas où les deux autres racines ont des parties réelles strictement négatives, discuter la stabilité de l'état conductif lorsque le paramètre $R = R_T - R_S$ est proche de $F(k_x, k_z)$.

En supposant que $s = 0$ pour le polynôme d'ordre 3 qui exprime la relation de dispersion généralisée, on obtient la relation $R_T - R_S = k^6/k_x^2$. On a donc $F(k_x, k_z) = (k_x^2 + k_z^2)^3/k_x^2$. Si $R_T - R_S > F(k_x, k_z)$, la valeur propre $s = 0$ devient positive et l'équilibre devient instable. Si $R_T - R_S < F(k_x, k_z)$, l'équilibre est stable.

- 7) Montrer que les choix $k_z = n\pi$ et $k_z = -n\pi$ avec n entier permettent de construire des solutions satisfaisant les conditions aux limites. En déduire la taille des rouleaux de convection lorsque l'état conductif bifurque vers une solution stationnaire.

La superposition de deux solutions ayant le même k_x , des k_z opposés avec $k_z = n\pi$ et des amplitudes opposées, est une nouvelle solution. Elle satisfait les conditions aux limites. Le minimum de $(k_x^2 + n^2 \pi^2)^3 / k_x^2$ est obtenu pour $k_c = \pi/\sqrt{2}$ et vaut $R_c = 27\pi^4/4$. Le seuil d'instabilité est obtenu pour $R_T - R_S = R_c$ et $k = k_c$. La taille des rouleaux de convection au seuil de cette instabilité stationnaire est alors $L_c = 2\pi/k_c = 2\sqrt{2}$.

3 Exercice sur le chapitre 3

EXERCICE 4.8 Bifurcation noeud-col

On considère le système dynamique $\dot{X} = F(X) = \mu + \alpha X^2$ avec $X(t) \in \mathbb{R}$.

- 1) Déterminer les équilibres en fonction des valeurs de μ et $\alpha \neq 0$.

Si $\alpha \mu < 0$ et $\mu \neq 0$ il existe deux équilibres solution de $F(X) = 0$. Si $\mu = 0$, $X = 0$ est le seul équilibre. $X_+ = \sqrt{-\mu/\alpha}$ et $X_- = -\sqrt{-\mu/\alpha}$. Si $\alpha \mu < 0$

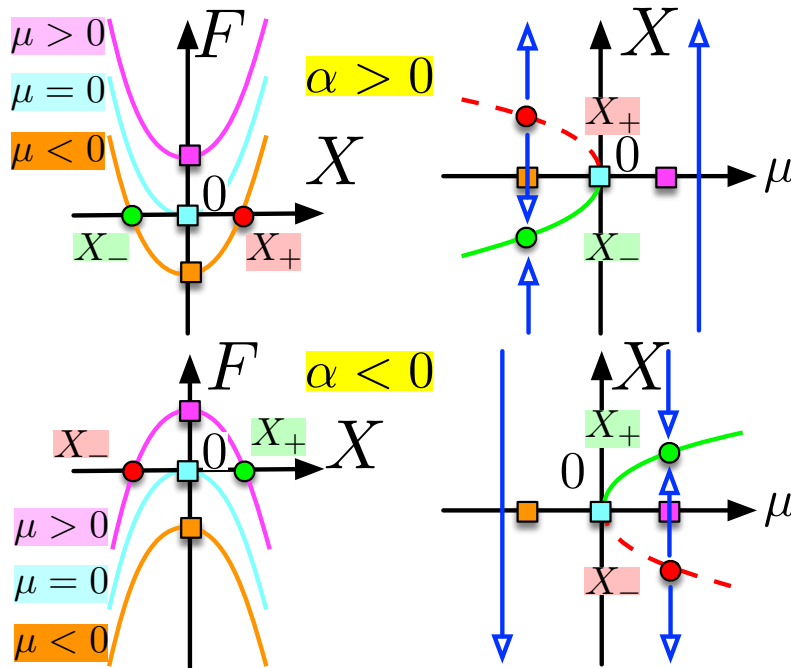


FIGURE 4.5 – Bifurcation noeud-col.

- 2) En utilisant les notations $X_+ = \sqrt{-\mu/\alpha}$ et $X_- = -\sqrt{-\mu/\alpha}$ lorsqu'elles sont définies, discuter la stabilité des équilibres en fonction des valeurs de α et μ .

Pour $\alpha > 0$ et $\mu < 0$, comme $F'(X_+) > 0$ et $F'(X_-) < 0$, X_+ est instable et X_- est stable. Pour $\alpha < 0$ et $\mu > 0$, comme $F'(X_+) < 0$ et $F'(X_-) > 0$, X_+ est stable et X_- est instable.

- 3) Tracer le diagramme de bifurcation lorsque μ varie pour $\alpha < 0$. Même question pour $\alpha > 0$.

| Voir figure 4.5.

EXERCICE 4.9 Bifurcation fourche imparfaite

On considère le système dynamique $\dot{x} = \mu x - x^3 + \epsilon$ avec $x(t) \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in \mathbb{R}_+$.

- 1) Définir l'espace des phases et l'espace de contrôle de ce système. Dans le cas particulier $\epsilon = 0$, calculer les équilibres et tracer le diagramme de bifurcation en fonction de μ en dessinant les trajectoires. Comme se nomme la bifurcation obtenue ?

| L'espace des phases des états x est \mathbb{R} et l'espace des paramètres de contrôle (μ, ϵ) est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Le diagramme de bifurcation pour $\epsilon = 0$ est celui d'une bifurcation fourche supercritique.

- 2) Sans faire de calcul, mais en traçant éventuellement l'allure de fonctions utiles, tracer le diagramme de bifurcation en fonction de μ dans le cas $0 < \epsilon \ll 1$. Quelle est ou quelles sont les bifurcations obtenues dans ce cas.

| Le tracé des fonctions $f(\mu, \epsilon; x) = \mu x - x^3 + \epsilon$ pour différentes valeurs de μ permet de déterminer le nombre d'équilibres et leur stabilité et de tracer le diagramme de bifurcation (figure 4.6). La bifurcation fourche est remplacée par une bifurcation noeud-col à cause de la brisure de symétrie induite par le (petit) terme ϵ .

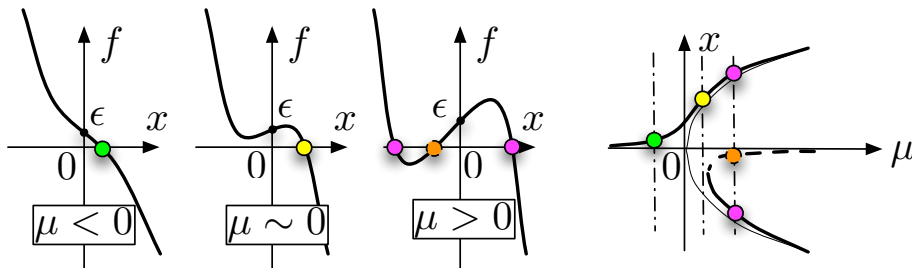


FIGURE 4.6 – Bifurcation fourche imparfaite.

EXERCICE 4.10 Bifurcations avec hysteresis

On considère le système dynamique réel $\dot{X} = \mu + 3X - X^3$ où $X(t) \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On cherche à déterminer et interpréter son diagramme de bifurcation.

- 1) Tracer la fonction $G(X) = 3X - X^3$ en spécifiant les coordonnées de ses extrema.
- 2) Tracer la fonction $F(X) = \mu + G(X)$ pour toutes les valeurs significatives de μ . Indiquer à chaque fois son nombre de racines.
- 3) Tracer dans le plan (μ, X) les équilibres $X_\epsilon(\mu)$ du système dynamique.

- 4) Déterminer la stabilité de chacun de ces équilibres et tracer en traits pleins les équilibres stables et en traits pointillés les équilibres instables.
- 5) Tracer, dans le plan (μ, X) , les trajectoires du système dynamique.
- 6) Décrire le phénomène d'hysteresis observé en augmentant μ d'une valeur fortement négative vers une valeur fortement positive puis en le diminuant de nouveau.

Corrigé 4.9 Bifurcations avec hysteresis

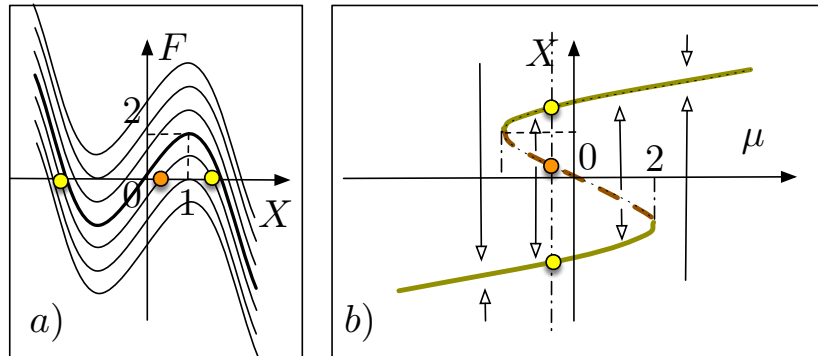


FIGURE 4.7 – a) Fonction $F(X)$ pour plusieurs valeurs de μ . b) Diagramme de bifurcation.

- 1) La fonction $G(X)$ est tracée en traits gras sur la figure 4.7a. Ses extrema sont atteints en $X = \pm 1$ et valent respectivement ± 2 .
- 2) Les fonctions $F(X)$ sont tracées sur la figure 4.7a. Elles ont une racine pour $|\mu| > 2$, deux (dont une double) pour $|\mu| = 2$ et trois pour $|\mu| < 2$.
- 3) Le tracé des équilibres est la courbe $\mu = 3X - X^3$ dans le plan (μ, X) (figure 4.7b).
- 4) La stabilité des équilibres X_e s'obtient en lisant sur la figure 4.7a le signe de la dérivée $F'(X_e)$. On obtient le graphe de la figure 4.7b.
- 5) Les trajectoires sont des points, des segments de droites ou des demi-droites représentées sur la figure 4.7b.
- 6) En augmentant μ , on suit l'équilibre stable positif jusqu'à $\mu = 2$ où l'on transite brusquement vers l'équilibre stable négatif. Si l'on diminue alors μ , on reste sur cet équilibre jusqu'à $\mu = -2$ où l'on transite de nouveau.

EXERCICE 4.11 Polynôme de degré trois

On considère le système dynamique réel défini par $\dot{X} = F(X)$ avec $X(t) \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $F(X) = \mu X - X^2 + X^3$.

- 1) Déterminer les équilibres X_e en fonction des valeurs de μ .
- 2) Tracer l'ensemble de ces équilibres dans un diagramme (μ, X) .
- 3) Indiquer la valeur de μ_* au-delà de laquelle il n'existe plus qu'un seul équilibre.

- 4) Tracer $F(X)$ pour les cinq cas suivants :
 $\mu \in]-\infty, 0[$, $\mu = 0$, $\mu \in]0, \mu_*[$, $\mu = \mu_*$ et $\mu \in]\mu_*, \infty[$.
- 5) Discuter la stabilité de tous les équilibres.
- 6) Tracer le diagramme de bifurcation dans le plan (μ, X) en représentant les trajectoires à l'aide de flèches.

Corrigé 4.9 Polynôme de degré trois

1) L'équilibre $X = 0$ existe pour toutes les valeurs de μ . Pour $\mu < \mu_* = 1/4$, il existe deux équilibres supplémentaires $X_e^\pm = (1 \pm \sqrt{1 - 4\mu})/2$, qui ne sont plus que $X_e^* = 1/2$ pour $\mu = \mu_*$. **2)** Le tracé des équilibres est constitué de la droite $X = 0$ et de la parabole $\mu = X - X^2$ de sommet $(\mu, X) = (\mu_*, X_e^*) = (1/4, 1/2)$. **3)** Pour $\mu > \mu_* = 1/4$, il n'y a plus qu'un équilibre. **4)** Le tracé de $Y = F(X)$ est représenté sur la figure 4.8 pour les cinq cas considérés. **5)** Un équilibre X_e est stable si sa dérivée $F'(X_e)$ est négative. Comme $F'(0) = \mu$, l'équilibre $X_e = 0$ est stable pour $\mu < 0$, marginal pour $\mu = 0$ et instable pour $\mu > 0$. Comme $F'(X_e) = X_e(2X_e - 1)$ pour $X_e = X_e^\pm$, on en déduit que le seul cas de stabilité pour ces équilibres est pour $X_e = X_e^-$ et $\mu \geq 0$. **6)** Le diagramme de bifurcation avec ses trajectoires est tracé sur la figure 4.8.

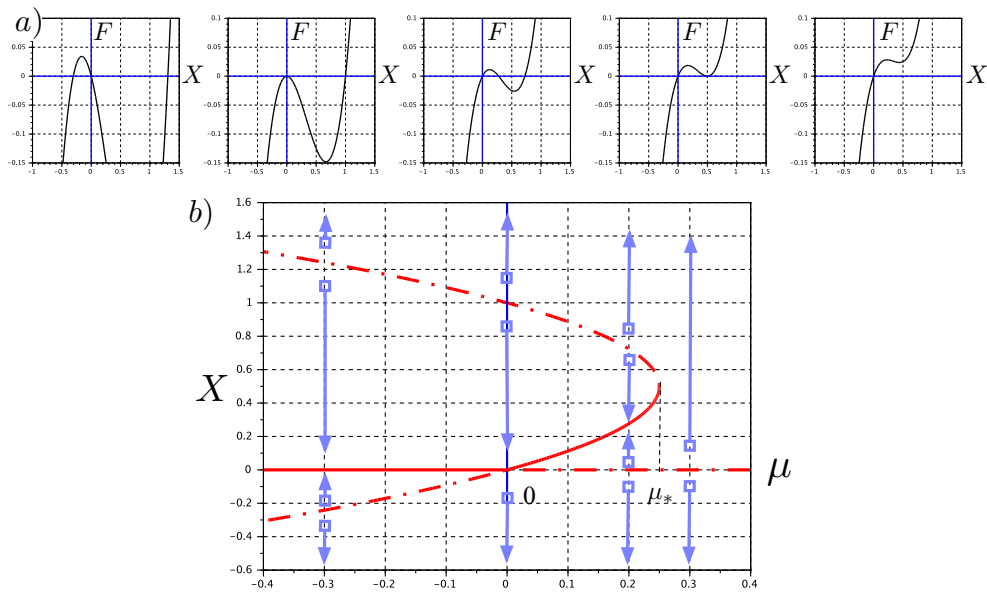


FIGURE 4.8 – a) Fonction $F(X)$ dans ses cinq configurations. b) Diagramme de bifurcation.

EXERCICE 4.12 Équations de Saint-Venant

On considère le système des équations de Saint-Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \alpha - \frac{g|U|U}{K^2 h^{4/3}}, \quad (4.13)$$

où $U(x, t)$ et $h(x, t)$ sont respectivement la vitesse et la hauteur d'une couche de fluide peu profonde à surface libre coulant sur un plan incliné faisant un angle

α avec l'horizontale. La gravité est noté g et K est le "nombre de Strickler" qui caractérise le frottement du fluide sur le fond. On suppose que $U \geq 0$.

- 1) Montrer que les solutions homogènes et stationnaires (h_n, U_n) vérifient $U_n = K h_n^{2/3} \sqrt{I}$ où I est une constante que l'on déterminera. Quelle est la dimension du nombre de Strickler ?

On a $U_n = K h_n^{2/3} \sqrt{I}$ avec $I = \sin \alpha$. L'unité de K est en $\text{m}^{1/3}/\text{s}$.

- 2) On choisit h_n comme unité de longueur, U_n comme unité de vitesse et h_n/U_n comme unité de temps. Écrire les équations ainsi adimensionnées en faisant apparaître le nombre de Froude $Fr = U_n/\sqrt{g \cos \alpha h_n}$ ainsi que le nombre sans dimension $M = g K^{-2} h_n^{-1/3}$.

En notant les champs adimensionnés de la même façon que les champs avec dimensions, on obtient $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial h}{\partial x} + M \left(1 - \frac{|U|U}{h^{4/3}}\right)$.

- 3) Calculer la relation de dispersion des ondes dans le cas $M = 0$ et $F = O(1)$. Exprimer les vitesses de phases en revenant aux grandeurs dimensionnelles. Ces ondes sont-elles dispersives ?

Dans le cas $M = 0$, la linéarisation $U = 1 + \tilde{U}$ et $h = 1 + \tilde{h}$ des équations conduit à $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0$. La recherche de solution de la forme $(U, h) = (A, B) \exp(ikx + st)$ conduit aux équations $(s + ik)A = -\frac{1}{Fr^2} ikB$ et $(s + ik)B + ikA = 0$. En annulant le déterminant de ce système linéaire on obtient $(s + ik)^2 + k^2/Fr^2 = 0$. On en déduit $s = -i\omega$ avec $\omega = k(1 \pm 1/Fr)$. En grandeurs dimensionnées, la vitesse de phase de ces ondes non dispersives est $c_\varphi = U_n \pm \sqrt{g \cos \alpha h_n}$.

- 4) Calculer la relation de dispersion des ondes dans le cas $1/M = 0$ et $F = O(1)$. Exprimer les vitesses de phases en revenant aux grandeurs dimensionnelles. Ces ondes sont-elles dispersives ?

Dans le cas M infini, on a $U = h^{2/3}$ en grandeur adimensionnée et donc $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h^{5/3}) = 0$. Les petites perturbations de l'équilibre $(U, h) = (1, 1)$ vérifient $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{5}{3} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0$. La relation de dispersion des ondes est alors $\omega = \frac{5}{3} k$. La vitesse de phase de ces ondes non dispersives est $c_\varphi = \frac{5}{3} U_n$ en grandeur dimensionnée.

- 5) Dans le cas $M = O(1)$ et $F = O(1)$, écrire les équations linéarisées autour de l'équilibre.

Dans le cas général, les équations linéarisées sont $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} - 2M\tilde{U} + \frac{4}{3}M\tilde{h}$ et $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0$.

- 6) Montrer que la stabilité de l'équilibre dépend des racines complexes d'un polynôme de degré deux en $s = \sigma - i\omega$ dont on explicitera les coefficients en fonction des données du problème.

La recherche de solution de la forme $(U, h) = (A, B) \exp(ikx + st)$ conduit aux équations $(s + ik)A = -\frac{1}{Fr^2} ikB - 2MA + \frac{4}{3}MB$ et $(s + ik)B + ikA = 0$. En annulant le déterminant de ce système linéaire, on obtient l'équation $(s + ik + 2M)(s + ik) - ik \left(ik \frac{1}{Fr^2} - \frac{4}{3}M\right) = 0$.

- 7) Montrer que l'écoulement de base se déstabilise pour un nombre de Froude critique F_c que l'on calculera. On pourra poser $\sigma = 0$ et calculer les parties réelles et imaginaires du polynôme.

La courbe marginale dans l'espace des paramètres de contrôle est déterminée par la relation $\sigma = 0$. Le polynôme caractéristique en $s = -i\omega$ s'écrit alors $[i(-\omega + k) + 2M]i(-\omega + k) - ik\left(ik\frac{1}{F_c^2} - \frac{4}{3}M\right) = 0$. En annulant les parties réelles et imaginaires, on obtient $(-\omega + k) = -\frac{2}{3}k$ et $(-\omega + k)^2 = k^2/F_c^2$ d'où $\omega = \frac{5}{3}k$ et $F_c = 3/2$.