

Chapitre 3

Linéarisation autour de l'équilibre

O. Thual, 15 novembre 2022

Sommaire

1	Systèmes dynamiques simples	2
1.1	Forme normale de la bifurcation fourche	3
1.2	Bifurcations d'un équilibre stable	4
1.3	Exemple du pendule simple	6
2	Systèmes conservatifs ou dissipatifs	8
2.1	Évolution du volume dans l'espace des phases	8
2.2	Systèmes dynamiques hamiltoniens	9
2.3	L'oscillateur de Van der Pol	10
3	Équations aux dérivées partielles	12
3.1	Modèle linéaire	12
3.2	Linéarisation autour d'un équilibre	14
3.3	Calcul de stabilité dans le cas général	14

Introduction

Les modèles utilisés pour décrire les systèmes physiques évoluant dans le temps peuvent être des systèmes d'équations différentielles ordinaires, que nous appellerons "systèmes dynamiques", ou des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Nous nous intéressons ici aux équilibres de ces systèmes, c'est-à-dire à leurs solutions stationnaires.

La stabilité de ces équilibres est obtenue en considérant l'évolution temporelle de leurs petites perturbations. Cette évolution est décrite par un système d'équations linéaires obtenu en négligeant les termes non linéaires qui sont d'ordre deux. Nous décrivons, sur des exemples de complexité croissante, les techniques mathématiques qui permettent de construire cette linéarisation et d'en étudier les solutions.

La plupart des modèles physiques dépendent de paramètres de contrôle que l'on peut réduire à des nombres sans dimensions (nombre de Reynolds, nombre de Rayleigh, nombre de Richardson ...). Lorsque ces paramètres changent, d'une expérience à l'autre, le nombre d'équilibres ainsi que leur stabilité changent. En variant continument les paramètres de contrôle, on peut déterminer les seuils de "bifurcation", c'est-à-dire les valeurs de ces paramètres pour lesquels le nombre d'équilibre ou leur stabilité change, les deux allant en général de pair.

Les bifurcations supercritiques, pour lesquelles de nouveaux équilibres stables apparaissent au-delà du seuil de déstabilisation d'un équilibre trivial, se rencontrent, par exemple, dans les systèmes forcés par des gradients thermiques. Les bifurcations sous-critiques, pour lesquelles des équilibres instables coexistent avec un équilibre trivial avant qu'il ne se déstabilise, se rencontrent, par exemple, dans les systèmes forcés par des gradients de vitesses.

Une autre notion très importante est la distinction entre les systèmes dissipatifs et les systèmes conservatifs. Ces derniers décrivent, par exemple, les systèmes physiques pour lesquels on néglige les phénomènes de frottements ou de diffusion. Sur le plan mathématique, cette distinction peut se faire en examinant l'évolution d'un volume d'états dans "l'espace des phases".

1 Systèmes dynamiques simples

Le système dynamique appelé "forme normale de la bifurcation fourche" est le prototype de l'instabilité d'un système dont un équilibre trivial, ou plutôt invariant par une symétrie, se déstabilise lorsque l'on varie un paramètre de contrôle. On peut le voir comme l'équation qui régit la croissance linéaire et la saturation linéaire de l'amplitude d'un mode instable au voisinage d'une instabilité stationnaire dans un système complexe comme, par exemple, la convection de Rayleigh-Bénard.

D'une manière générale, la déstabilisation d'un équilibre stable, observée en variant les paramètres de contrôle d'un système, peut être vue comme le passage à travers l'axe des imaginaires purs dans le plan complexe d'une ou plusieurs valeurs propres du système linéarisé autour de l'équilibre étudié. Cette linéarisa-

tion est présenté pour le cas des systèmes dynamique autonomes quelconques ainsi que pour le cas particulier du pendule simple.

1.1 Forme normale de la bifurcation fourche

On considère le système dynamique appelée “forme normale de la bifurcation fourche” et régi par l’équation différentielle ordinaire :

$$\dot{X} = F(X) = \mu X + \alpha X^3, \quad (3.1)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}$ est la solution recherchée et $(\mu, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ deux paramètres de contrôle. Les équilibres, ou solutions stationnaires, sont les états X_e solutions de l’équation $F(X_e) = 0$. La figure 3.1 représente ces équilibres en fonction des valeurs des paramètres α et μ .

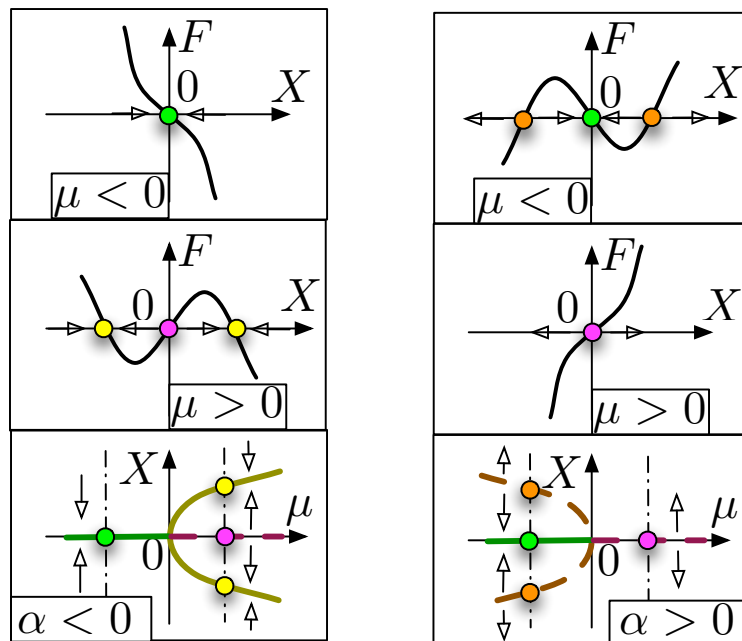


FIGURE 3.1 – Diagramme de la bifurcation fourche. Équilibres solutions de l’équation $F(X) = 0$ pour différentes valeurs de α et μ et leur stabilité.

On remarque que l’équilibre $X = 0$ existe pour toutes les valeurs des paramètres tandis que les équilibres $X_{\pm} = \pm\sqrt{-\mu/\alpha}$ existent uniquement pour $\alpha\mu < 0$. La stabilité d’un équilibre X_e est obtenue en posant $X(t) = X_e + A(t)$ et en effectuant le développement limité

$$\dot{X} = \dot{A} = F(X_e + A) = F'(X_e) A + O(|A|^2), \quad (3.2)$$

où A est supposé être une petite perturbation et $F'(X) = \mu + 3\alpha X^2$ est la dérivée de $F(X)$. Tant que A reste petit, on doit donc résoudre

$$\dot{A} = s A \quad \text{avec} \quad s = F'(X_e) \implies A(t) = A(0) e^{st}. \quad (3.3)$$

On en déduit que X_e est stable si $s < 0$, marginal pour $s = 0$ et instable pour $s > 0$. On obtient alors le “diagramme de bifurcation” de la figure 3.1 où les

équilibres stables sont représentés en trait plein et les équilibre instables en pointillé.

L'équilibre $X = 0$ se déstabilise pour $\mu \geq 0$. On dit que cet équilibre subit une "bifurcation" pour la valeur critique $\mu = 0$ du paramètre. Pour $\alpha < 0$, la bifurcation est "supercritique" dans la mesure où deux équilibres stables apparaissent pour $\mu > 0$. Pour $\alpha > 0$, la bifurcation est "sous-critique" dans la mesure où deux équilibres instables existent pour $\mu < 0$.

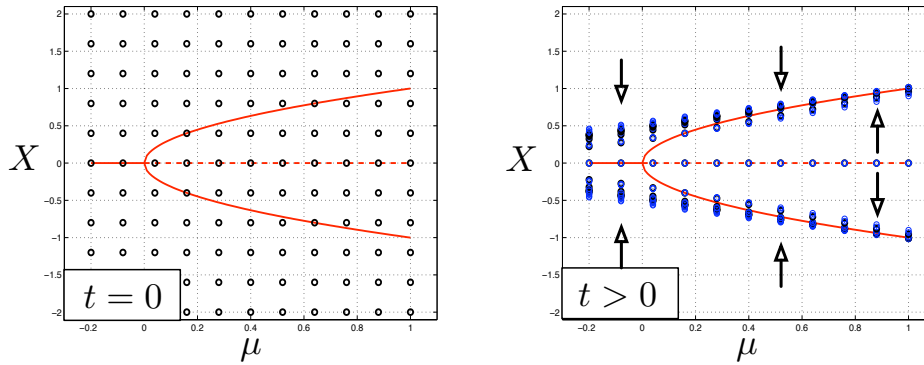


FIGURE 3.2 – Bifurcation fourche supercritique. a) Conditions initiales $[\mu, X(0)]$ réparties régulièrement. b) Positions des points $[\mu, X(t)]$ au cours du temps.

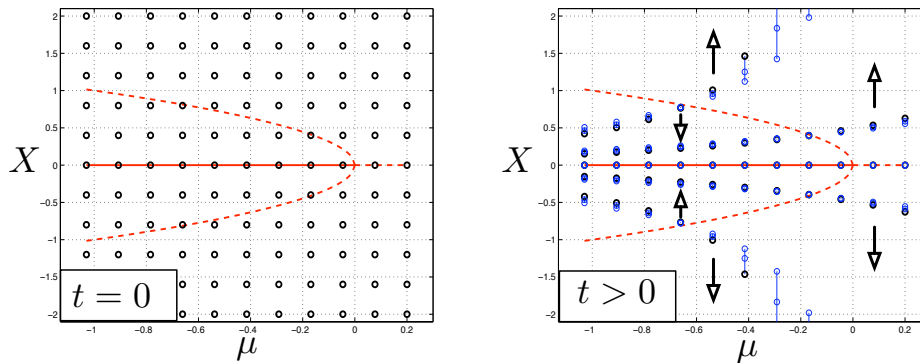


FIGURE 3.3 – Bifurcation fourche sous-critique. a) Conditions initiales $[\mu, X(0)]$ réparties régulièrement. b) Positions des points $[\mu, X(t)]$ au cours du temps.

La figure 3.2 représente l'évolution de conditions initiales dans le cas surpercritique $\alpha < 0$. On voit que les trajectoires sont des points, des segments de droites ou des droites qui convergent vers un des équilibres stables.

1.2 Bifurcations d'un équilibre stable

L'exemple précédent est un cas particulier des systèmes dynamiques autonomes (indépendants du temps) qui s'écrivent

$$\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X}) \quad \iff \quad \dot{X}_i = F_i(X_1, \dots, X_n) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

avec $\underline{X} = {}^t(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que \underline{F} est continuellement différentiable. Une solution $\underline{X}(t)$ de ce système décrit une “trajectoire” (voir figure 3.4) dans “l’espace des phases” \mathbb{R}^n . On suppose que \underline{F} dépend de m paramètres de contrôle $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$. On montre (théorème de Cauchy) qu’une condition initiale $\underline{X}(0)$ donne naissance à une et une seule trajectoire $\underline{X}(t)$. On en déduit que, pour un système dynamique autonome, deux trajectoires l’espace des phases ne se coupent jamais, sauf en un point d’équilibre vers lequel elles tendent toutes les deux.

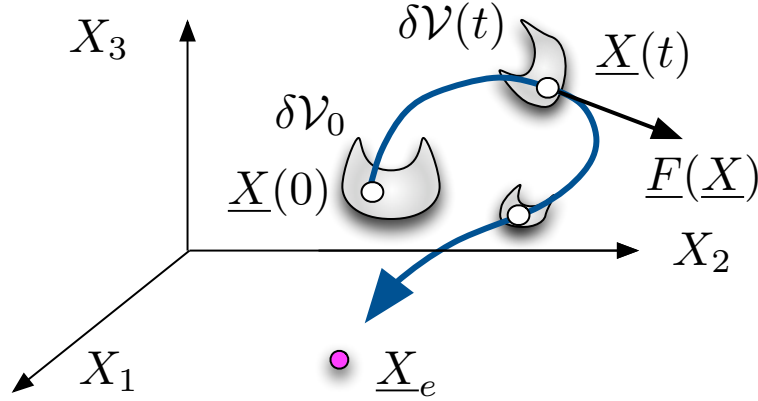


FIGURE 3.4 – Système dynamique à trois degrés de libertés.

Un point d’équilibre \underline{X}_e , formant à lui seul une trajectoire, est solution de l’équation implicite $\underline{F}(\underline{X}_e) = \underline{0}$. On dit aussi que c’est une solution stationnaire ou encore un point critique du système dynamique. Pour étudier la stabilité d’un tel équilibre, on pose $\underline{X}(t) = \underline{X}_e + \tilde{\underline{X}}(t)$ où $\tilde{\underline{X}}$ est une petite perturbation et on peut écrire le système sous la forme

$$\dot{\underline{X}} = \dot{\tilde{\underline{X}}} = \underline{DF}(\underline{X}_e) \cdot \tilde{\underline{X}} + O(\|\tilde{\underline{X}}\|^2) \quad (3.5)$$

où $\underline{DF}(\underline{X}_e)$ est la jacobienne de \underline{F} en \underline{X}_e de composantes $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\underline{X}_e)$. Tant que $\tilde{\underline{X}}$ reste petit, on doit donc résoudre

$$\dot{\tilde{\underline{X}}} = \underline{\Lambda} \tilde{\underline{X}} \quad \text{avec} \quad \underline{\Lambda} = \underline{DF}(\underline{X}_e). \quad (3.6)$$

Si $\underline{\Lambda}$ est diagonalisable, on peut écrire

$$\tilde{\underline{X}}(t) = \sum_{l=1}^n A_l(t) \underline{\phi}_l \quad \text{avec} \quad \underline{\Lambda} \cdot \underline{\phi}_l = s_l \underline{\phi}_l, \quad (3.7)$$

où les s_l , pour $l = 1, \dots, n$ sont les n valeurs propres de $\underline{\Lambda}$, réelles ou complexes, et les $\underline{\phi}_l$ sont les vecteurs propres associés, réels ou complexes. On doit donc résoudre

$$\dot{A}_l = s_l A_l \implies A_l(t) = A_l(0) e^{s_l t}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

La stabilité de l’équilibre \underline{X}_e dépend donc du signe de la partie réelle des valeurs propres s_l de la matrice $\underline{\Lambda} = \underline{DF}(\underline{X}_e)$. Si toutes les valeurs propres s_l ont une partie réelle négative, l’équilibre \underline{X}_e est stable. Si une ou plusieurs de ces valeurs propres possède une partie réelle positive, l’équilibre est instable

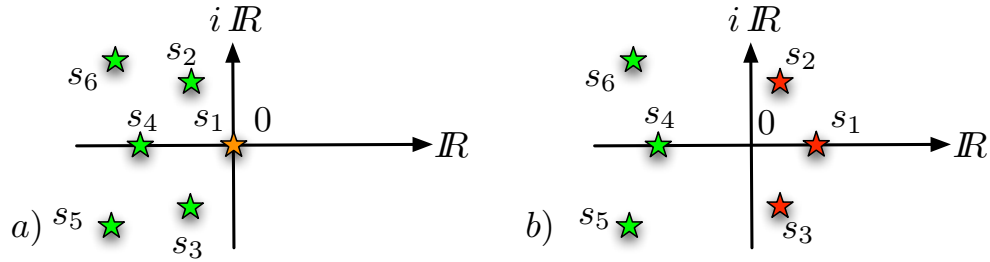


FIGURE 3.5 – Exemples de positions des valeurs propres s_l dans le plan complexe $\mathbb{C} = (\mathbb{R}, i\mathbb{R})$. a) Équilibre marginal. b) Équilibre instable.

(figure 3.5b). On dit que la stabilité de l'équilibre est "marginale" lorsqu'une ou plusieurs valeurs propres sont sur l'axe des imaginaires purs (figure 3.5a).

En variant les paramètres de contrôle d'un système, il se peut qu'une ou plusieurs valeurs propres traversent l'axe des imaginaires purs. Ainsi, un équilibre stable (toutes les valeurs propres de partie réelle négative) peut devenir instable (une ou plusieurs valeurs propres de partie réelle positive). Cette transition de l'état stable à un instable est appelée "bifurcation". En variant un seul paramètre, on peut observer une bifurcation "stationnaire" lorsqu'une valeur propre réelle et négative devient positive ou une bifurcation "oscillatoire" lorsqu'une paire de valeurs propres conjuguées (les coefficients du système sont supposés réels) traverse l'axe des imaginaires purs.

Lorsque \underline{A} n'est pas diagonalisable, on peut trouver une base qui la transforme en blocs de Jordan. À un bloc de Jordan de taille r associé à une valeur propre s correspond un comportement $A(t) = P_r(t) \exp(st)$ où P_r est un polynôme de degré $r-1$. On voit donc que c'est encore la partie réelle des valeurs propres qui contrôle la stabilité de l'équilibre avec, toutefois, un comportement particulier dans le cas "marginal" $\text{Re}(s) = 0$.

1.3 Exemple du pendule simple

On considère un pendule simple formé d'une masse m assimilée à un point et suspendue à un fil de masse négligeable et de longueur l . En l'absence de frottement, l'angle $u(t)$ que fait le pendule avec la verticale vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$\ddot{u} + \omega^2 \sin u = 0. \quad (3.9)$$

où $\omega = \sqrt{g/l}$ et g est la gravité. Cette équation ne fait pas intervenir la masse.

Le pendule simple est un cas particulier de la famille des équations différentielles s'écrivant sous la forme $\ddot{u} = -V'(u)$ où $V(u)$ est une fonction dérivable quelconque appelée potentiel. Il suffit en effet de poser $V(u) = \omega^2(1 - \cos u)$. Dans le cas d'un potentiel $V(u)$ quelconque, on peut ramener l'équation différentielle d'ordre deux en temps à un système dynamique d'ordre un en temps de la forme $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X})$ en posant $\underline{X} = {}^t(q, p)$ et en écrivant

$$\dot{q} = p \quad \text{et} \quad \dot{p} = -V'(q). \quad (3.10)$$

Il suffit en effet de poser $u(t) = q(t)$ et $\dot{u}(t) = p(t)$. L'espace des phases de

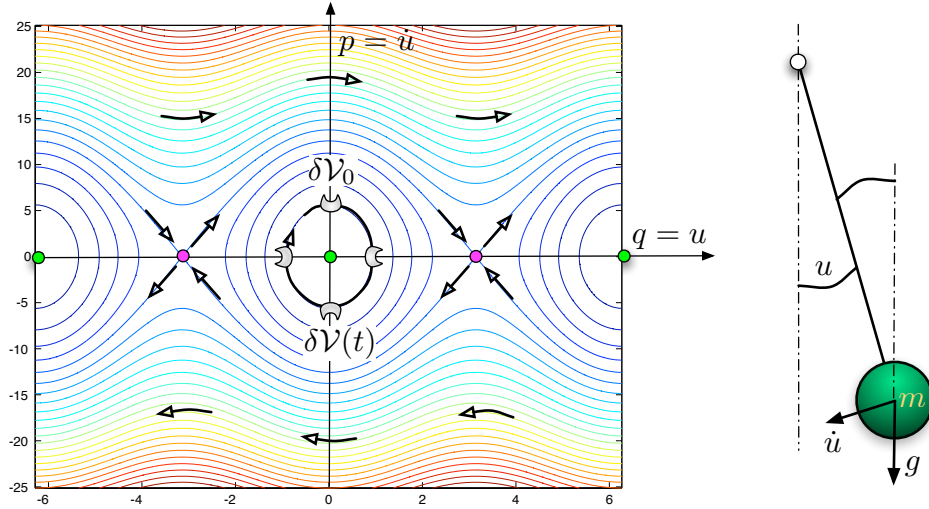


FIGURE 3.6 – a) Portrait de phase du pendule simple. b) Angle u et vitesse \dot{u} .

ce système est l'ensemble des $\underline{X} \in \mathbb{R}^2$ et l'espace de contrôle est constitué de l'ensemble des valeurs du paramètre $\omega^2 \in \mathbb{R}_+$.

Les équilibres sont des points $\underline{X}_e = (q_e, 0)$ tels que X_e est un extremum de la fonction V . La stabilité de ces équilibres est obtenue en calculant les valeurs propres de la matrice

$$\underline{DF}(\underline{X}_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(q_e) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

c'est-à-dire en recherchant les solutions de $s^2 + V''(q_e) = 0$. Si $V''(q_e) < 0$, la valeur q_e correspond à un maximum du potentiel V . Les valeurs propres sont alors $s = \pm \sqrt{-V''(q_e)}$ et l'équilibre est instable. Si $V''(q_e) > 0$, la valeur q_e correspond à un minimum du potentiel V . Les valeurs propres sont alors $s = \pm i\omega_e$ avec $\omega_e = \sqrt{V''(q_e)}$ et l'équilibre est marginal.

Pour le pendule simple, deux équilibres sont obtenus en résolvant $\underline{F}(\underline{X}_e) = \underline{0}$. Ces équilibres correspondent à la position basse $\underline{X}_b = (0, 0)$ et à la position haute $\underline{X}_h = (\pi, 0)$ du pendule. La stabilité de \underline{X}_h (instable) et de \underline{X}_b (marginale) est obtenue en calculant, respectivement, les valeurs propres des matrices jacobiennes

$$\underline{DF}(\underline{X}_h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{DF}(\underline{X}_b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

c'est-à-dire en résolvant, respectivement, les deux équations caractéristiques $s^2 - \omega^2 = 0$ et $s^2 + \omega^2 = 0$. Les valeurs propres sont donc, respectivement, $s^\pm = \pm \omega$ et $s^\pm = \pm i\omega$, auxquelles sont associés, respectivement, les vecteurs propres $\underline{\phi}^\pm = (1, \pm \omega)$ et $\underline{\phi}^\pm = (1, \pm i\omega)$.

Le tracé des trajectoires d'un système dépendant d'un potentiel s'obtient en remarquant que si $[q(t), p(t)]$ est une solution, la quantité $E(t) = \frac{1}{2}p(t)^2 + V[q(t)]$ ne varie pas dans le temps (il suffit de vérifier que $\dot{E} = 0$). Les trajectoires dans l'espace des phases $\underline{X} = (q, p) \in \mathbb{R}^2$ sont donc situées sur les courbes $H_0 = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$ obtenues pour toutes les valeurs de H_0 possibles (figure 3.7).

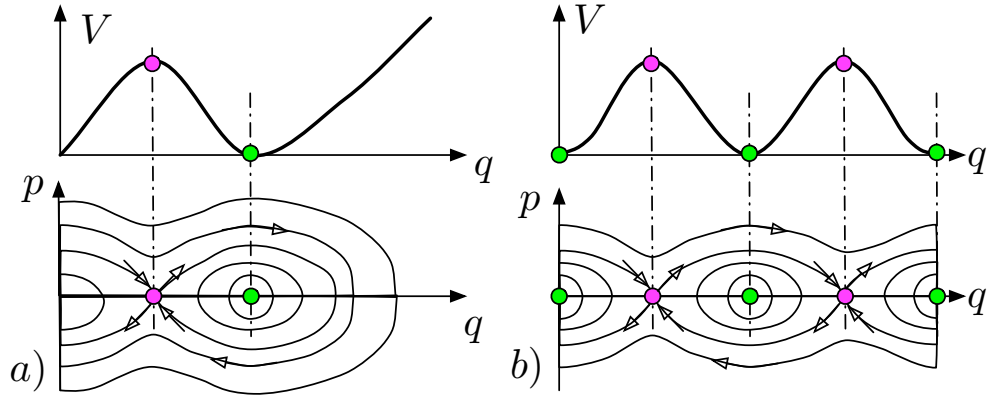


FIGURE 3.7 – Systèmes dépendant d'un potentiel $V(q)$ et trajectoires associées. a) Potentiel de forme quelconque. b) Potentiel du pendule simple.

2 Systèmes conservatifs ou dissipatifs

La traduction mathématique des notions de systèmes conservatifs ou dissipatifs est effectuée en calculant l'évolution d'un volume de conditions initiales dans l'espace des phases. Ces notions sont illustrées sur le cas des systèmes hamiltoniens (conservatifs) et de l'oscillateur de Van de Pol (dissipatif) qui subit une bifurcation oscillatoire (de Hopf).

2.1 Évolution du volume dans l'espace des phases

Étant donné le système dynamique $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X})$, on considère un ensemble de conditions initiales occupant un petit volume $\delta\mathcal{V}_0$ (une petite aire pour $n = 2$) autour de la condition initiale particulière \underline{X}_0 dans l'espace des phase \mathbb{R}^n (voir figures 3.4, 3.6 et 3.8). L'évolution de ce volume obéit à l'équation

$$\frac{1}{\delta\mathcal{V}(t)} \dot{\delta\mathcal{V}}(t) = \operatorname{div} \underline{F}[\underline{X}(t)] = \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_l}{\partial x_l}[\underline{X}(t)], \quad (3.13)$$

où $\underline{X}(t)$ est la trajectoire issue de la condition initiale $\underline{X}(0) = \underline{X}_0$ (figure 3.4).

On dit que le système dynamique est "conservatif" si $\operatorname{div} \underline{F} = 0$, c'est-à-dire si les volumes d'états de l'espace des phases sont invariants par le système dynamique. C'est le cas, par exemple, du pendule simple comme on peut le vérifier facilement.

On dit que le système dynamique est "dissipatif" si $\operatorname{div} \underline{F} \neq 0$ avec certaines régions de l'espace des phases où $\operatorname{div} \underline{F} < 0$. C'est le cas du pendule amorti pour lequel le frottement de l'air peut se modéliser par une force proportionnelle à la vitesse, conduisant au modèle

$$\ddot{u} + 2\kappa \dot{u} + \omega^2 \sin u = 0. \quad (3.14)$$

Le paramètre $\kappa > 0$ est un facteur d'amortissement du mouvement du pendule et l'on a $\operatorname{div} \underline{F} = -2\kappa$.

Les équilibres sont les mêmes que pour le pendule non amorti. Leur stabilité et le portrait de phase de leur voisinage (voir figure 3.8) s'obtiennent en linéarisant

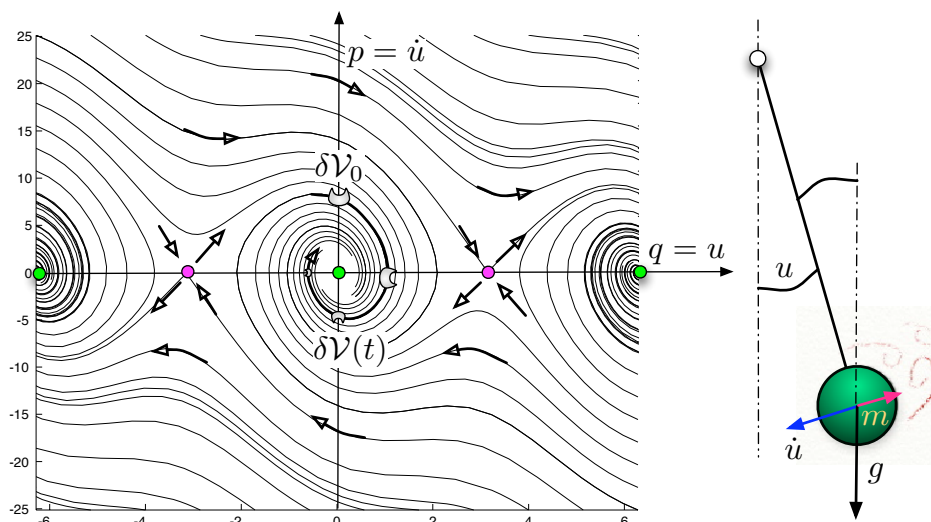


FIGURE 3.8 – a) Portrait de phase du pendule amorti. b) Force de frottement.

les équations autour de la position haute (instable) ou de la position basse (stable).

Les systèmes dissipatifs favorisent l'existence "d'attracteurs", c'est-à-dire d'ensemble de trajectoires dans l'espace des phases vers lesquelles convergent les autres trajectoires. C'est, pour le cas du pendule, l'équilibre stable qui correspond à une trajectoire réduite à un point. Il existe des attracteurs plus riches comme les cycles limites (trajectoires périodiques), les tores ou encore les attracteurs étranges.

2.2 Systèmes dynamiques hamiltoniens

Très souvent, les systèmes "conservatifs" intervenant en physique appartiennent à la famille des systèmes hamiltoniens qui s'écrivent

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \quad \text{et} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p), \quad (3.15)$$

où $H(q, p)$ est une fonction dérivable quelconque. En choisissant le Hamiltonien $H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$, on retrouve le cas des systèmes dépendant d'un potentiel. Mais on peut considérer d'autres formes de l'Hamiltonien $H(q, p)$ comme par exemple avec le choix $H = q p$ qui conduit au système $\dot{q} = p$ et $\dot{p} = -q$.

Étant donnée une solution $[q(t), p(t)]$, on montre que la quantité $E(t) = H[q(t), p(t)]$ est un invariant du mouvement. En effet,

$$\dot{E} = \dot{q} \frac{\partial H}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \quad (3.16)$$

On montre de plus que les aires sont conservées dans l'espace des phases. En effet, si on note $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X})$ avec $\underline{X} = {}^t(q, p)$ le système dynamique hamiltonien,

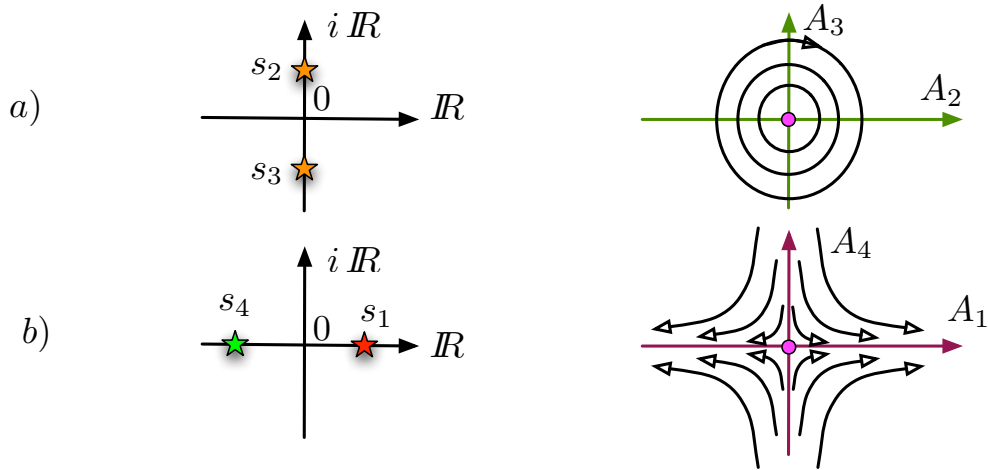


FIGURE 3.9 – Valeurs propres pour un système conservatif : a) imaginaires pures, b) réelles.

on peut calculer la divergence

$$\operatorname{div} \underline{F}(\underline{X}) = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0. \quad (3.17)$$

Cette propriété entraîne qu'un volume (ici une aire) de conditions initiales reste constant au cours du temps, comme dans le cas d'un écoulement isochore. On parle alors de systèmes conservatifs. Les attracteurs de ces systèmes ne peuvent pas être des équilibres dans la mesure où il faut contracter les volumes de l'espace des phases pour y converger.

L'invariance de l'hamiltonien H et des aires dans l'espace des phases se généralise au cas des systèmes hamiltoniens $H(\underline{q}, \underline{p})$ dans \mathbb{R}^{2n} dont l'expression générale est

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\underline{q}, \underline{p}) \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\underline{q}, \underline{p}) \quad (3.18)$$

pour $i = 1, \dots, n$ avec $\underline{q} \in \mathbb{R}^n$ et $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$.

La stabilité des équilibres des systèmes conservatifs est particulière. Dans la mesure où $\operatorname{div} \underline{F} = 0$, on doit avoir $\sum_{l=1}^n s_l = 0$. Dans les cas les plus courants (voir par exemple le cas du pendule simple), on peut avoir une paire de valeurs propres imaginaires pures opposées ou une paire de valeurs propres réelles opposées. Les trajectoires autour de l'équilibre sont alors, respectivement, des ellipses ou des hyperboles (voir figure 3.9).

2.3 L'oscillateur de Van der Pol

Une façon de forcer le pendule peut être obtenue en imposant une force proportionnelle à la vitesse et dans le même sens, au moins pour les petites oscillations. On peut imaginer une telle force sur un pendule en utilisant l'induction magnétique que provoque la masse ponctuelle lorsqu'elle est électriquement chargée. Les équations du pendule avec une dissipation négative pour les petites oscillations apparaissent naturellement dans un montage électronique portant le nom

d'oscillateur de Van der Pol. Ces équations s'écrivent

$$\ddot{u} + (\lambda u^2 - 2\mu)\dot{u} + \omega^2 \sin u = 0. \quad (3.19)$$

La stabilité de l'équilibre $u = 0$ s'obtient en étudiant la partie réelle des valeurs propres du système linéarisé qui s'écrivent $s = \mu \pm i\omega$. La position basse $u = 0$ est donc stable pour $\mu < 0$ (on retrouve la notion de dissipation en posant $\mu = -\kappa$) et instable pour $\mu > 0$. La valeur critique de la bifurcation est $\mu = 0$.

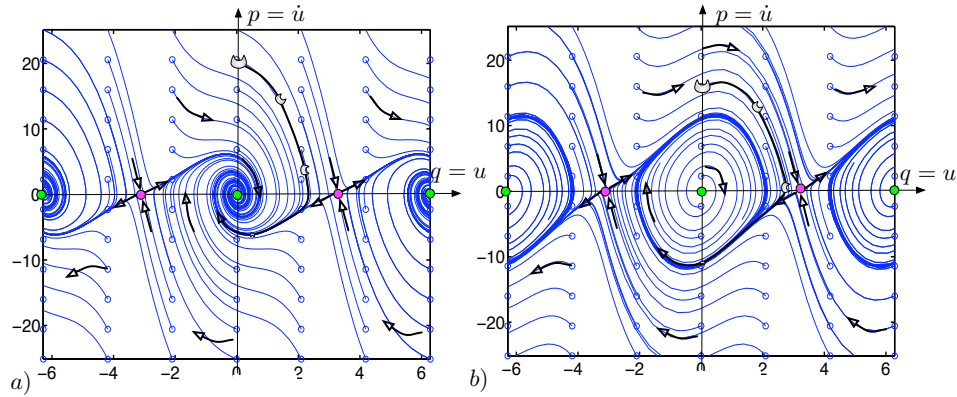


FIGURE 3.10 – Portrait de phase de l'oscillateur de Van der Pol pour $\lambda = 2$. a) Cas stable $\mu = -1$, b) cas instable $\mu = 1$.

On peut alors montrer (admis ici), à l'aide d'un développement asymptotique, que l'amplitude complexe $A(t) \in \mathcal{C}$ associée au mode instable vérifie, dans le voisinage de la bifurcation $\mu = 0$, l'équation

$$\dot{A} = (\mu + i\omega) A + (\alpha + i\beta) |A|^2 A \quad (3.20)$$

où $\alpha = \lambda/2$ et $\beta = 3/(2\omega)$. L'espace des phases de ce système dynamique, ramené en variables réelles est de dimension 2. Ce système, dans le cas de paramètres $(\mu, \omega, \alpha, \beta)$ quelconques, décrit une "bifurcation de Hopf".

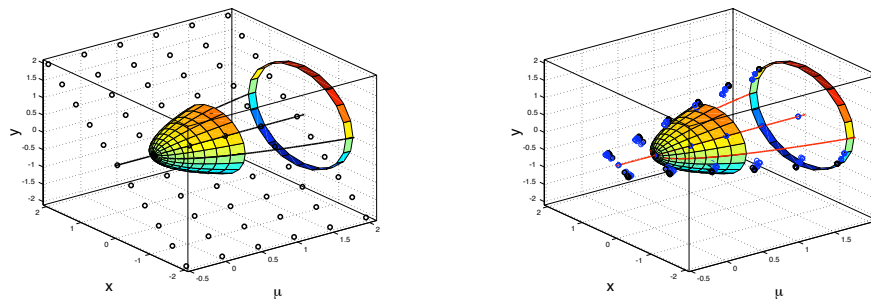


FIGURE 3.11 – Diagramme (μ, x) de la bifurcation de Hopf. a) Conditions initiales $[\mu, x(0)]$ réparties régulièrement. b) Positions des points $[\mu, x(t)]$ au cours du temps.

En posant $A(t) = \rho(t) \exp[i\theta(t)]$ avec $\rho(t) > 0$, le système s'écrit

$$\dot{\rho} = \mu \rho + \alpha \rho^3 \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \omega + \beta \rho^2. \quad (3.21)$$

On remarque que l'évolution du module $\rho(t)$ est découplée de celle de $\theta(t)$ et que son étude a déjà été réalisée lors de l'étude de la bifurcation fourche. L'évolution de la phase $\theta(t)$ dépend alors de celle de $\rho(t)$ de manière simple.

On peut alors tracer les diagrammes de bifurcation de la bifurcation de Hopf (figure 3.11) à la lumière des diagrammes de bifurcation de la bifurcation fourche. Ces nouveaux diagrammes peuvent être représentée dans l'espace tridimensionnel (μ, x, y) où x et y sont les parties réelles et imaginaires de A . Pour μ fixé, les trajectoires parcourent donc des courbes dans un espace de dimension 2 que l'on peut voir comme \mathbb{R}^2 ou \mathcal{C} .

3 Équations aux dérivées partielles

Pour étendre les notions d'instabilité aux cas des équations aux dérivées partielles, on présente ici des modèles basés sur des équations aux dérivées partielles unidimensionnelles (1D). Il est fait ici abstraction de l'éventuelle signification physique des solutions, bien qu'il serait possible d'explicitier des systèmes dont la dynamique se laisse décrire par ces modèles.

3.1 Modèle linéaire

On considère le modèle linéaire 1D suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \mu_0 u + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \quad (3.22)$$

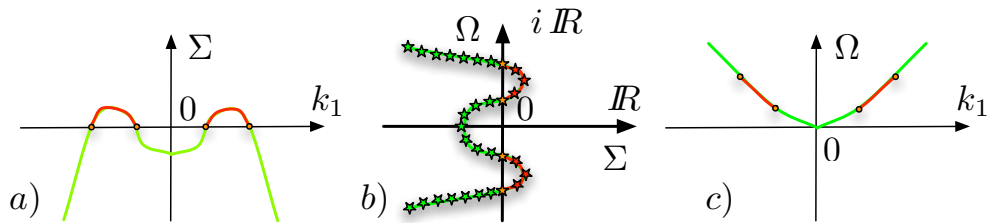


FIGURE 3.12 – Relation de dispersion généralisée : a) $\Sigma(k_1)$, b) $\Omega(k_1)$ et c) valeurs propres $s(k_1) = \Sigma(k_1) + i \Omega(k_1)$ dans \mathcal{C} .

En se plaçant dans le cadre d'un domaine infini, on cherche des solutions complexes de la forme

$$u(x, t) = u_m e^{i k_1 x + s t} = u_m e^{i k_1 x} e^{\sigma t - i \omega t} \quad (3.23)$$

avec $u_m \in \mathcal{C}$, $k_1 \in \mathbb{R}$ et $s = \sigma - i \omega \in \mathcal{C}$. La forme de ces solutions est justifiée par le fait que l'équation aux dérivées partielles considérée est invariante par translations d'espace et de temps.

On pourrait considérer des solutions plus générales de la forme $u(x, t) = a \exp(\gamma x + i k_1 x) \exp(\sigma t - i \omega t)$, pour prendre en compte une croissance spatiale, mais on se restreint ici au cas de la "stabilité temporelle" où les solutions sont bornées à l'infini. Dans la mesure où le modèle est linéaire, les solutions générales sont obtenues en sommant les solutions élémentaires considérées. En

particulier, les solutions réelles peuvent s'obtenir en prenant la partie réelle des solutions complexes. Pour pouvoir étendre les notations aux cas 2D ou 3D, on dit que k_1 est le "vecteur d'onde" et que sa norme (valeur absolue) $k = |k_1|$ est le "nombre d'onde".

En reportant la forme des solutions recherchées dans l'équation, on voit que l'on obtient des solutions non triviales ($u_m \neq 0$) à condition que les relations de dispersion généralisées suivantes soient vérifiées :

$$\sigma = \Sigma(k_1) = \mu_0 - \mu_2 k_1^2 + \mu_4 k_1^4 \quad \text{et} \quad \omega = \Omega(k_1) = \alpha_1 k_1 - \alpha_3 k_1^3. \quad (3.24)$$

Un autre point de vue consiste à écrire le modèle sous la forme $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u$, où $\mathcal{L} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ est l'opérateur différentiel qui contient les dérivées spatiales et P est le polynôme défini par $P(\xi) = \mu_0 - \alpha_1 \xi + \mu_2 \xi^2 - \alpha_3 \xi^3 + \mu_4 \xi^4$. Les fonctions $A e^{i k x}$ sont les "modes propres" de l'opérateur \mathcal{L} . On peut écrire

$$\mathcal{L} e^{i k_1 x} = P(i k_1) e^{i k_1 x} = [\Sigma(k_1) - i \Omega(k_1)] e^{i k_1 x}. \quad (3.25)$$

La deuxième relation de l'équation (3.24) (figure 3.13.b) est la relation de dispersion de l'équation de Korteweg de Vries linéaire que l'on obtient dans le cas où les coefficients μ_j du modèle sont nuls.

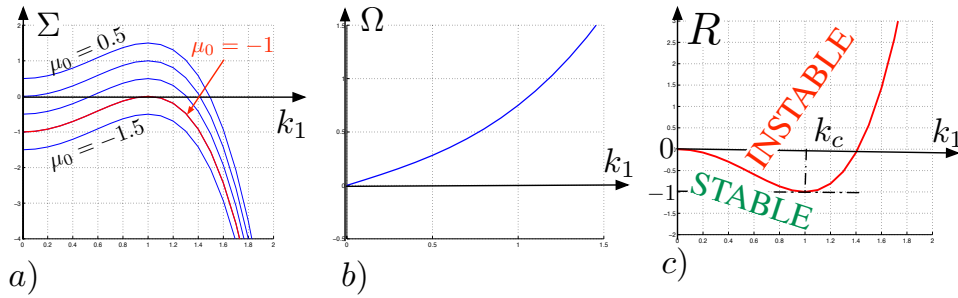


FIGURE 3.13 – Dispersion et stabilité du modèle linéaire 1D dans le cas $\alpha_1 = .5$, $\alpha_3 = -.25$, $\mu_2 = -2$ et $\mu_4 = -1$. a) Taux de croissance $\sigma = \Sigma(k_1)$ pour $\mu_0 \in \{-1.5, -1.0, -0.5, 0.0, 0.5\}$. b) Relation de dispersion $\omega = \Omega(k_1)$. c) Seuil d'instabilité $R_c = -1$ dans le plan (k_1, R) .

La première relation de l'équation (3.24) (figure 3.13.a) permet de déterminer si les solutions du modèle sont amplifiées ($\sigma > 0$) ou amorties ($\sigma < 0$). On voit que l'on doit supposer $\mu_4 \leq 0$ pour que les modes de grand nombre d'onde k (petites périodes spatiales) soient amortis. Dans le cas contraire, le modèle est non seulement "non physique", mais aussi mal posé sur le plan mathématique. Si $\mu_4 > 0$ et $\mu_2 < 0$, le maximum de $\Sigma(k_1)$ est atteint pour $k_1 = \sqrt{\frac{\mu_2}{2\mu_4}}$ et vaut $\mu_0 - \frac{\mu_2^2}{4\mu_4}$. On voit alors que lorsque le nombre sans dimension $R = \frac{4\mu_0\mu_4}{\mu_2^2}$ est inférieur à la valeur critique $R_c = -1$, tous les modes sont stables. Lorsque R est supérieur à cette valeur critique, les modes sont instables pour un intervalle fini de nombres d'ondes $|k_1|$, et le mode le plus instable correspond à la valeur critique $k_c = \sqrt{\frac{\mu_2}{2\mu_4}}$.

3.2 Linéarisation autour d'un équilibre

On considère le modèle non linéaire 1D suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu u + \alpha u^3 + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (3.26)$$

avec $u(x, t) \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$, $\mu_2 < 0$ et $\mu_4 < 0$. Pour $\mu > 0$, on remarque l'existence des deux solutions stationnaires symétriques $u_+ = u_0$ et $u_- = -u_0$ avec $u_0 = \sqrt{-\mu/\alpha}$. On s'intéresse à la stabilité temporelle des équilibre $u_+ = u_0$ au regard de petites perturbations. Pour cela, on pose

$$u(x, t) = u_0 + \tilde{u}(x, t) \quad (3.27)$$

et l'on s'intéresse à l'évolution des perturbations $\tilde{u}(x, t)$ que l'on peut choisir petites à un instant initial donné. En reportant dans l'équation du modèle on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = & (\mu + 3\alpha u_0^2) \tilde{u} + \mu_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4} \\ & + \alpha (3u_0 \tilde{u}^2 + \tilde{u}^3) . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Tant que la perturbation $\tilde{u}(x, t)$ reste petite, on peut négliger les termes "non linéaires" $\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ et $[3u_0 \tilde{u}^2 + \tilde{u}^3]$ devant les termes linéaires. En posant $\mu_0 = \mu + 3\alpha u_0^2 = -2\mu$, le système "linéarisé autour de l'équilibre u_0 " s'écrit donc

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \mu_0 \tilde{u} + \mu_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4} . \quad (3.29)$$

On retrouve le modèle linéaire étudié dans le paragraphe précédent à condition de poser $\alpha_1 = u_0$ et $\alpha_3 = 0$.

3.3 Calcul de stabilité dans le cas général

Pour généraliser le concept de stabilité temporelle d'un équilibre au cas 3D, on considère le modèle général

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{U}) \quad (3.30)$$

où $\underline{U}(\underline{x}, t) = {}^t(U_1, U_2, \dots, U_n) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur dans un espace de dimension n , $\underline{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur des coordonnées spatiales et $\underline{\mathcal{F}}$ est un opérateur non linéaire faisant intervenir les dérivées spatiales $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial}{\partial x_3}$ des composantes de \underline{U} .

On suppose que \underline{U}_e est un équilibre du modèle, c'est-à-dire qu'il vérifie $\underline{\mathcal{F}}(\underline{U}_e) = \underline{0}$. On pose alors $\underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{U}_e + \tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t)$ et l'on suppose que $\tilde{\underline{U}}$ est une perturbation initialement petite. En reportant dans le modèle on obtient

$$\frac{\partial \tilde{\underline{U}}}{\partial t} = \underline{L} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \tilde{\underline{U}} + O \left(\|\tilde{\underline{U}}\|^2 \right) , \quad (3.31)$$

où $\underline{L}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est une matrice $n \times n$ dont les composantes $L_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ sont des polynômes et $O \left(\|\tilde{\underline{U}}\|^2 \right)$ est un terme négligeable tant que la perturbation est petite.

Si le modèle (3.30) est invariant par translation dans le temps et dans l'espace et que l'équilibre \underline{U}_e est constant, les coefficients des polynômes $L_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ de la matrice \underline{L} sont constants. On peut alors chercher des solutions du système linéarisé $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\underline{U}} = \underline{L} \tilde{\underline{U}}$ sous la forme

$$\tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t) = U_m \underline{\phi} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} + s t} \quad (3.32)$$

où U_m est une amplitude complexe constante, $\underline{\phi}$ un vecteur complexe constant et $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$ un vecteur de \mathbb{R}^3 appelé le "vecteur d'onde". On doit alors résoudre

$$s \underline{\phi} = \underline{L}(ik_1, ik_2, ik_3) \cdot \underline{\phi}. \quad (3.33)$$

Les solutions non nulles sont obtenues en choisissant s , \underline{k} et $\underline{\phi}(\underline{k})$ de telle sorte que $\underline{\phi}$ soit un vecteur propre de la matrice $\underline{L}(ik_1, ik_2, ik_3)$. Les valeurs propres sont alors de la forme $s = \Sigma(\underline{k}) - i \Omega(\underline{k})$ et on dit que la solution complexe correspondante $\underline{U}(\underline{x}, t) = U_m \underline{\phi}(\underline{k}) \exp[i \underline{k} \cdot \underline{x} + s(\underline{k}) t]$ avec U_m quelconque est un "mode propre".

Dans le cas où $\underline{L}(ik_1, ik_2, ik_3)$ est une matrice $(n \times n)$ diagonalisable, cette recherche de valeurs propres $s = \sigma - i\omega$ et vecteurs propres $\underline{\phi}$ conduit à n relations de dispersion généralisées de la forme

$$\sigma_l = \Sigma_l(\underline{k}) \quad \text{et} \quad \omega_l = \Omega_l(\underline{k}) \quad \text{pour } l = 1, \dots, n. \quad (3.34)$$

Les vecteurs propres $\underline{\phi}_l$ associés, solutions de $\underline{L} \underline{\phi}_l = s_l \underline{\phi}_l$ permettent de construire les solutions complexes sous la forme

$$\tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l=1}^n \hat{U}_l(\underline{k}) \underline{\phi}_l(\underline{k}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}} e^{\Sigma_l(\underline{k}) t - i \Omega_l(\underline{k}) t} dk_1 dk_2 dk_3. \quad (3.35)$$

On en déduit que si $\sigma_l = \Sigma_l(\underline{k})$ est négatif pour les $i = 1, \dots, n$ et tous les vecteurs d'ondes \underline{k} considérés, le système linéaire est stable et, par conséquent, l'équilibre \underline{U}_e autour duquel le modèle a été linéarisé. En revanche, il suffit qu'il existe une valeur propre s_l dont la partie réelle σ_l est positive pour une bande, même petite, de vecteurs d'ondes \underline{k} , pour que l'équilibre considéré soit instable.

Si le modèle (3.30) est invariant par translation dans le temps et dans toutes les directions d'espace sauf x_3 , on cherche alors des solutions sous la forme

$$\tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t) = \underline{\phi}(x_3) e^{i k_1 x_1 + i k_2 x_2 + s t} \quad (3.36)$$

où $\underline{\phi}(x_3)$ un vecteur complexe fonction de x_3 et $\underline{k} = (k_1, k_2)$ un vecteur de \mathbb{R}^2 . On doit alors résoudre alors

$$s \underline{\phi}(x_3) = \underline{L} \left(ik_1, ik_2, \frac{d}{dx_3} \right) \cdot \underline{\phi}(x_3). \quad (3.37)$$

Très souvent, le domaine est borné dans la direction x_3 et le modèle (3.30) est complété par des conditions aux limites. On se ramène donc à une équation différentielle ordinaire en x_3 linéaire avec conditions aux limites et l'on cherche les valeurs de s pour lesquelles il existe des solutions non triviales.

FORMULAIRE

Bifurcation fourche

Le système dynamique réel suivant décrit, de manière générique, l'instabilité stationnaire d'un équilibre par brisure d'une symétrie :

$$\dot{X} = F(X) = \mu X + \alpha X^3,$$

La stabilité des équilibres X_e , tels que $F(X_e) = 0$, est obtenue en examinant le signe de la dérivée de F : stable pour $F'(X_e) < 0$, instable sinon. La bifurcation fourche est supercritique pour $\alpha < 0$ et sous-critique pour $\alpha > 0$.

Bifurcations d'un équilibre stable

La stabilité des équilibres \underline{X}_e des systèmes dynamiques autonomes de la forme :

$$\underline{\dot{X}} = \underline{F}(\underline{X}) \iff \dot{X}_i = F_i(X_1, \dots, X_n) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

est obtenue en examinant les valeurs propres de la jacobienne $\underline{DF}(\underline{X}_e)$ de \underline{F} en \underline{X}_e . Si les parties réelles de toutes les valeurs propres sont négatives, l'équilibre est stable. Il est instable sinon, avec une bifurcation stationnaire si une valeur propre réelle devient positive, ou une bifurcation oscillatoire si une paire de valeurs propres complexes conjuguées traverse l'axe des imaginaires purs.

Système dynamique dérivant d'un potentiel

Les systèmes dérivant d'un potentiel V s'écrivent :

$$\ddot{u} + V'(u) = 0 \iff \begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -V'(q) \end{cases} \iff \underline{\dot{X}} = \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ -V'(X_1) \end{pmatrix}.$$

Les équilibres $\underline{X}_e = (q_e, 0)$ sont obtenus pour q_e extremum de $V(q)$ et sont stables si $V''(q_e) > 0$ (minimum du potentiel) ou instables sinon (maximum). La quantité $E(t) = \frac{1}{2} p(t)^2 + V[q(t)]$ ne varie pas dans le temps.

Systèmes dynamiques hamiltoniens

Les systèmes dynamiques hamiltoniens sont de la forme suivante, pour un choix quelconque d'une fonction dérivable $H(\underline{q}, \underline{p})$ avec $\underline{q} \in \mathbb{R}^n$ et $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\underline{q}, \underline{p}) \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\underline{q}, \underline{p}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Ils sont conservatifs car $\text{div } \underline{F}$, où \underline{F} est définie par $\underline{\dot{X}} = \underline{F}(\underline{X})$ avec $\underline{X} = (\underline{q}, \underline{p})$. La quantité $E(t) = H[\underline{q}(t), \underline{p}(t)]$ ne varie pas dans le temps. Les systèmes dérivant d'un potentiel sont hamiltoniens avec $H(\underline{q}, \underline{p}) = \frac{1}{2} p^2 + V(q)$.

Bifurcation de Hopf

Le système dynamique complexe suivant d'écrit, de manière générique, l'instabilité oscillatoire d'un équilibre :

$$\dot{A} = (\mu + i\omega) A + (\alpha + i\beta) |A|^2 A .$$

En posant $A(t) = \rho(t) \exp[i\theta(t)]$ avec $\rho(t) > 0$, on se ramène à une bifurcation fourche pour ρ .

Équations aux dérivées partielles

La stabilité de $u = 0$ pour le modèle linéaire, réel, à coefficients constants

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \mu_0 u + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} ,$$

s'obtient en cherchant des solutions de la forme $u(x, t) = a e^{ik_1 x + \sigma t - i\omega t}$. La relation de dispersion généralisée s'écrit alors :

$$\sigma = \Sigma(k_1) = \mu_0 - \mu_2 k_1^2 + \mu_4 k_1^4 \quad \text{et} \quad \omega = \Omega(k_1) = \alpha_1 k_1 - \alpha_3 k_1^3 .$$

Calcul de stabilité dans le cas général

La stabilité d'un équilibre $U(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ pour un système d'équations aux dérivées partielles générale $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{U})$ avec $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ (par exemple), s'obtient en résolvant le modèle linéarisé suivant pour les petites perturbation $\tilde{U}(\underline{x}, t)$:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \underline{L} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \tilde{U}$$

Si le modèle est invariant par translation dans le temps et dans l'espace, les coefficients des polynômes $L_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ dont est composée la matrice \underline{L} sont constants. On peut alors chercher des solutions complexes sous la forme $\tilde{U}(\underline{x}, t) = U_m \phi e^{i\underline{k} \cdot \underline{x} + s t}$. Le signe de la partie réelle des valeurs propres s détermine la stabilité de l'équilibre.

EXERCICES

EXERCICE 3.1 Bifurcations sous-critiques

On considère le système dynamique

$$\dot{X} = F(X) = \mu X + \alpha X^3 - \gamma X^5 \quad (3.38)$$

avec $X(t) \in \mathbb{R}$. On suppose $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$.

- 1) Discuter le nombre de racines positives du polynôme $P(Y) = \mu + \alpha Y - \gamma Y^2$ en fonction des valeurs de μ en notant $\mu_* = -\alpha^2/(4\gamma)$. Tracer la fonction $F(x)$ pour $\mu < \mu_*$, pour $\mu_* < \mu < 0$ puis pour $\mu > 0$.

Comme $P'(Y) = \alpha - 2\gamma Y$ et $P(Y)$ tend vers l'infini lorsque $|Y|$ tend vers l'infini, la fonction $P(Y)$ est minimal pour $Y_m = \frac{\alpha}{2\gamma}$ et vaut $P(Y_m) = \mu + \frac{\alpha^2}{4\gamma}$. Elle admet deux racines pour $\mu > \mu_*$, une pour $\mu = \mu_*$ et zéro sinon. Le tracé de la fonction $F(X)$ est représenté sur la figure 3.14.

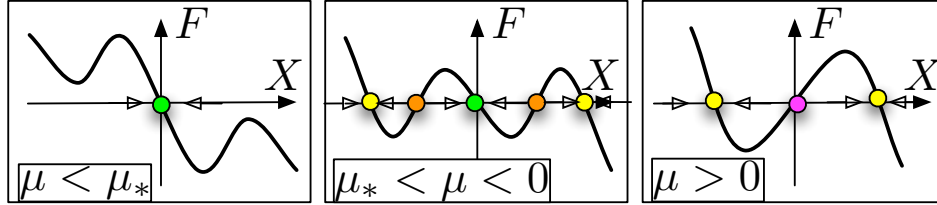


FIGURE 3.14 – Fonction $F(X)$ pour : $\mu < \mu_*$, pour $\mu_* < \mu < 0$ et pour $\mu > 0$.

- 2) Discuter le nombre d'équilibre et leur stabilité en utilisant les notations $X_{++} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2\gamma}}$, $X_+ = \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2\gamma}}$, $X_{--} = -X_{++}$ et $X_- = -X_+$ lorsqu'elles sont définies, avec $\Delta = \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma\mu}$.

$X = 0$ est toujours un équilibre. Il est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$. Pour $\mu < \mu_*$, $X = 0$ est le seul équilibre. Pour $\mu_* < \mu < 0$, les équilibres X_{++} et X_{--} sont stables et les équilibres X_+ et X_- sont instables.

- 3) Tracer le diagramme de bifurcation lorsque μ varie. Comme se nomme la bifurcation obtenue en $\mu = 0$? Est-elle sous-critique ou supercritique?

Le tracé du diagramme de bifurcation est représenté sur la figure 3.15a. On observe une bifurcation fourche sous-critique pour $\mu = 0$. Les bifurcations pour $\mu = \mu_*$ sont appelées "noeud-col".

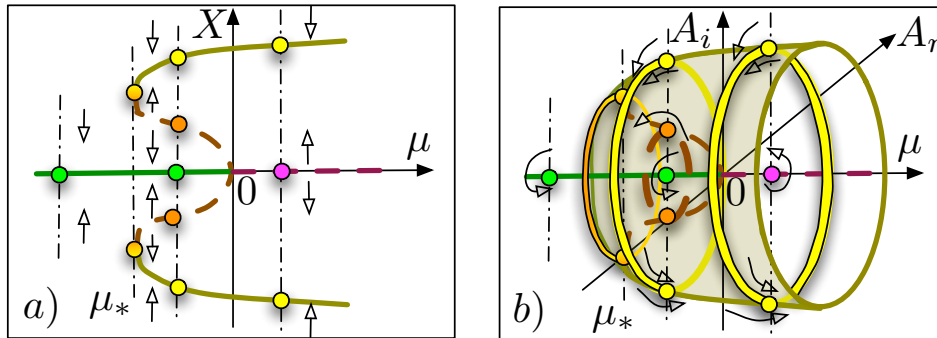


FIGURE 3.15 – Diagramme de bifurcation. a) système réel, b) système complexe.

On considère maintenant le système dynamique

$$\dot{A} = (\mu + i\omega) A + (\alpha + i\beta) |A|^2 A - (\gamma + i\delta) |A|^4 A, \quad (3.39)$$

avec $A(t) \in \mathcal{C}$. On suppose $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$.

- 4) En posant $A(t) = \rho(t) \exp[i\theta(t)]$, écrire le système dynamique en coordonnées polaires. En déduire le tracé du diagramme de bifurcation. Comme se nomme la bifurcation en $\mu = 0$?

On obtient $\dot{\rho} = \mu \rho + \alpha \rho^3 - \gamma \rho^5$ et $\dot{\theta} = \omega + \beta \rho^2 - \delta \rho^4$. On retrouve le système dynamique précédemment étudiant en remplaçant X par ρ . Le tracé du diagramme de bifurcation est représenté sur la figure 3.15b. On observe une bifurcation de Hopf sous-critique pour $\mu = 0$.

EXERCICE 3.2 Équation aux dérivées partielles 1D

On considère l'équation aux dérivées partielles unidimensionnelle (1D) suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu u - u^3 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (3.40)$$

avec $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $u(x, t) \in \mathbb{R}$ et μ un paramètre de contrôle réel.

1) Déterminer la stabilité de l'équilibre $u = 0$ en fonction de μ .

Si u est petit, on peut négliger les termes $u \frac{\partial u}{\partial x}$ et u^3 dans les équations. La recherche de solutions complexe de la forme $u = u_m \exp(i k_1 x + s t)$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$ et $s = \sigma - i \omega$ conduit aux relations de dispersion $\sigma = \Sigma(k_1) = \mu + k_1^2 - k_1^4$ et $\omega = \Omega(k_1) = 0$. Le maximum de $\Sigma(k_1)$ est atteint pour $k_1^2 = 1/2$ et vaut $\mu + 1/4$. Par conséquent, l'équilibre $u = 0$ est stable pour $\mu < -1/4$ et instable sinon.

2) Déterminer la stabilité de l'équilibre $u_0 = \sqrt{\mu}$ en fonction de $\mu \geq 0$.

On pose $u = u_0 + \tilde{u}$ et on néglige les termes d'ordre deux ou trois dans les équations qui s'écrivent alors $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = -2\mu \tilde{u} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4}$. On obtient alors les relations de dispersion $\sigma = \Sigma(k_1) = -2\mu + k_1^2 - k_1^4$ et $\omega = \Omega(k_1) = u_0 k_1$. Le maximum de $\Sigma(k_1)$ est atteint pour $k_1^2 = 1/2$ et vaut $-2\mu + 1/4$. Par conséquent, l'équilibre $u = u_0$ est instable pour $0 < \mu < 1/8$ et stable pour $\mu > 1/8$.