

## Chapitre 2

# Instabilité de Rayleigh-Bénard

*O. Thual, 15 novembre 2022*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Modèle de convection thermique . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1	Équations du modèle . . . . .	2
1.2	État conductif . . . . .	4
1.3	Adimensionalisation des équations . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Calcul de stabilité . . . . .</b>	<b>5</b>
2.1	Linéarisation des équations . . . . .	5
2.2	Hypothèse bidimensionnelle . . . . .	6
2.3	Solutions sans conditions aux limites . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Calcul du seuil de convection . . . . .</b>	<b>8</b>
3.1	Solutions avec conditions aux limites . . . . .	9
3.2	Méthode générale de recherche des modes propres . . . . .	10
3.3	Seuil de convection thermique . . . . .	10

---

## Introduction

L'objectif est de rendre compte des mouvements de convection rencontrés dans un fluide soumis à un gradient de température en calculant le seuil de déclenchement de cette instabilité thermique.

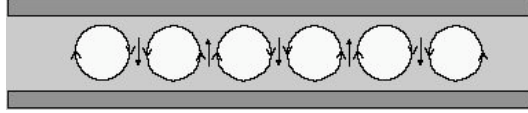


FIGURE 2.1 – *Rouleaux de convection.*

L'approximation de Boussinesq permet une formulation incompressible des équations de Navier-Stokes en prenant en compte des forces de flottabilité (poussée d'Archimède) dues à la dilatation du fluide et induite par une variation de la température.

Le système d'équations de l'approximation de Boussinesq étant énoncé, on s'intéresse à la configuration idéalisée d'une couche fluide horizontale forcée par un gradient thermique vertical en imposant les températures aux frontières. On suppose que les conditions aux limites en vitesse sont libres.

L'état conductif est caractérisé par une vitesse nulle et un profil linéaire de température à gradient vertical. On suppose que le bas de la couche est plus chaud que le haut et l'on augmente progressivement le forçage. Lorsque le forçage thermique est faible l'état conductif est stable. Une perturbation de température ou de vitesse est dissipée par la diffusion thermique ou la viscosité avant que la force d'Archimède n'ait eu le temps d'agir. Lorsque le forçage thermique dépasse un seuil critique, l'état conductif devient instable et des mouvements de convection apparaissent.

Cette étude de stabilité s'effectue en linéarisant les équations autour de l'état conductif. On montre alors que la stabilité de l'état conductif ne dépend que de la valeur d'un nombre sans dimension appelé nombre de Rayleigh.

## 1 Modèle de convection thermique

Pour décrire le mouvement de convection d'un fluide chauffé par le bas lorsque le champ de vitesse reste faible devant la vitesse du son, les équations de Navier-Stokes compressibles sont trop complexes et les équations de Navier-Stokes incompressibles ne rendent pas compte des forces de flottabilité. L'approximation de Boussinesq permet de prendre en compte ces forces tout en "filtrant" les ondes sonores.

### 1.1 Équations du modèle

Le modèle classiquement utilisé pour décrire la convection thermique dans un fluide repose sur les équations de Navier-Stokes incompressibles dans l'approximation de Boussinesq.

mation de Boussinesq. Les équations de ce modèle s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0, & \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_r} \operatorname{grad} p - \frac{\rho}{\rho_r} g \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}, \\ \frac{\rho}{\rho_r} &= 1 - \alpha (T - T_r), & \frac{dT}{dt} &= \kappa \Delta T, \end{aligned} \quad (2.1)$$

où  $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$  est le vecteur des coordonnées,  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  un repère orthonormé,  $\underline{U}(\underline{x}, t) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z$  est le champ de vitesse,  $p(\underline{x}, t)$  le champ de pression,  $\rho_r$  une valeur de référence de masse volumique,  $\rho(\underline{x}, t)$  le champ de masse volumique variable,  $\alpha$  un coefficient de dilatation thermique,  $T_r$  une valeur de référence de température,  $T(\underline{x}, t)$  le champ de température et  $\kappa$  le coefficient de diffusivité thermique. Le vecteur unitaire  $\underline{e}_z$  est vertical et  $g$  est l'intensité de la gravité. La notation  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad}$  est utilisée pour désigner la dérivée particulaire.

On voit que l'approximation de Boussinesq permet de prendre en compte la force d'Archimède  $(\rho - \rho_r) g \underline{e}_z$  tout en filtrant les ondes sonores (compressibilité) à l'aide de la relation  $\operatorname{div} \underline{U} = 0$ . Les processus physiques en compétition sont donc la flottabilité due à la dilatation thermique, la viscosité et la conduction thermique.

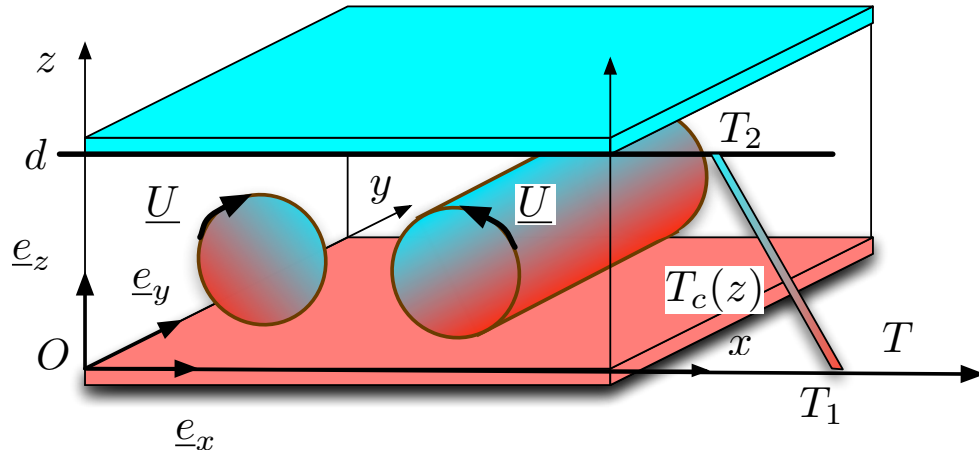


FIGURE 2.2 – Convection thermique entre deux plaques de températures respectives  $T_1$  et  $T_2$ .

On considère une couche fluide d'extension horizontale infinie comprise entre deux plaques planes horizontales séparées par une distance  $d$  (voir figure 2.2). La plaque située en  $z = 0$  est maintenue à une température constante  $T_1$  tandis que la plaque en  $z = d$  est maintenue à une température constante  $T_2$ . Les conditions aux limites en température s'écrivent donc

$$T = T_1 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{et} \quad T = T_2 \quad \text{en } z = d. \quad (2.2)$$

On suppose l'existence de conditions aux limites sans glissement pour la vitesse qui s'écrivent

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{et} \quad z = d. \quad (2.3)$$

## 1.2 État conductif

On appelle état conductif la solution stationnaire pour laquelle  $\underline{U} = \underline{0}$ . Dans ce cas, on montre facilement que le champ de température  $T$  est égal au profil conductif  $T_c(z)$  qui s'écrit

$$T_c(z) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{d} z . \quad (2.4)$$

Le profil de masse volumique correspondant  $\rho_c(z)$  vérifie donc

$$\frac{\rho_c(z)}{\rho_r} = 1 - \alpha [T_c(z) - T_r] = 1 - \alpha \left( T_1 - T_r - \frac{T_1 - T_2}{d} z \right) . \quad (2.5)$$

Le champ de pression, solution de  $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$ , est alors égal à

$$p_c(z) = p_r - \rho_r g z + \rho_r \alpha g (T_1 - T_r) z - \rho_r \alpha g \frac{T_1 - T_2}{2 d} z^2 , \quad (2.6)$$

où  $p_r$  est une pression de référence arbitraire.

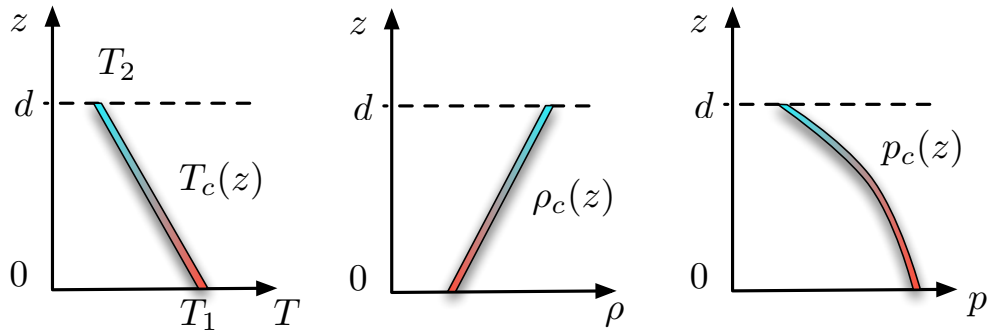


FIGURE 2.3 – Profils  $T_c(z)$ ,  $\rho_c(z)$  et  $p_c(z)$  de l'état conductif.

On définit alors  $\theta$ , l'écart de température au profil conductif par la relation  $T(\underline{x}, t) = T_c(z) + \theta(\underline{x}, t)$ . On effectue, de même, un changement de variable pour la pression en définissant le champ  $\Pi$  par la relation  $p(\underline{x}, t) = p_c(z) + \rho_r \Pi(\underline{x}, t)$ . Les équations du modèle sont alors équivalentes au système

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 , & \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} &= -\operatorname{grad} \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U} , \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \theta &= \frac{T_1 - T_2}{d} w + \kappa \Delta \theta . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\theta = 0 , \quad w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d . \quad (2.8)$$

## 1.3 Adimensionalisation des équations

On définit les variables adimensionnées

$$\underline{x} = [L] \underline{x}^* \quad \text{et} \quad t = [\tau] t^* \quad (2.9)$$

et les champs adimensionnés  $\underline{U}^*(\underline{x}^*, t^*)$ ,  $\theta^*(\underline{x}^*, t^*)$  et  $\Pi^*(\underline{x}^*, t^*)$  par les relations

$$\underline{U} = [L] [\tau]^{-1} \underline{U}^* , \quad \theta = [\Theta] \theta^* \quad \text{et} \quad \Pi = [L]^2 [\tau]^{-2} \Pi^* , \quad (2.10)$$

où les unités de longueur, de temps et de température sont respectivement

$$[L] = d \quad [\tau] = d^2/\kappa \quad \text{et} \quad [\Theta] = T_1 - T_2 . \quad (2.11)$$

L'unité de temps est ici basée sur la conductivité thermique  $\kappa$ . On aurait pu choisir la viscosité  $\nu$  à la place de  $\kappa$  pour obtenir une autre adimensionalisation. Les équations adimensionnées s'écrivent ici

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_* \underline{U}^* &= 0 , \\ \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial t^*} + \underline{U}^* \cdot \operatorname{grad}_* \underline{U}^* &= -\operatorname{grad}_* \Pi^* + R P \theta^* \underline{e}_z + P \Delta_* \underline{U}^* , \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \underline{U}^* \cdot \operatorname{grad}_* \theta^* &= w^* + \Delta_* \theta^* , \end{aligned} \quad (2.12)$$

où les opérateurs  $\operatorname{div}_*$ ,  $\operatorname{grad}_*$  et  $\Delta_*$  sont obtenus en dérivant par rapport aux variables adimensionnées et où apparaissent les deux nombres sans dimension

$$R = \frac{\alpha g d^3 (T_1 - T_2)}{\nu \kappa} \quad \text{et} \quad P = \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.13)$$

respectivement appelés “nombre de Rayleigh” et “nombre de Prandtl”. Les conditions aux limites en variables adimensionnées s'écrivent

$$\theta^* = 0 , \quad w^* = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{en} \quad z^* = 0 \quad \text{et} \quad z^* = 1 . \quad (2.14)$$

## 2 Calcul de stabilité

Le calcul de stabilité est simple si on suppose que l'écoulement n'est borné dans aucune direction. En effet, les symétries de translations permettent de considérer des modes propres ayant la forme d'exponentielles en espace et en temps, solution du modèle linéarisé autour de la solution stationnaire conductive. Ce cas est présenté ici pour permettre une première approche du calcul de stabilité. Ces calculs seront utilisés plus tard pour les conditions aux limites réalistes dues à l'existence des deux plaques.

### 2.1 Linéarisation des équations

On travaille désormais en variables adimensionnées mais on décide d'omettre les exposants \* dans les notations pour les simplifier. Les équations s'écrivent donc

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 , \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} &= -\operatorname{grad} \Pi + R P \theta \underline{e}_z + P \Delta \underline{U} , \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \theta &= w + \Delta \theta , \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec les conditions aux limites

$$\theta = 0 , \quad w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1 . \quad (2.16)$$

Pour étudier la stabilité de l'équilibre conductif, on suppose que les perturbations  $\underline{U}$ ,  $\theta$  et  $\Pi$  sont petites, ce qui conduit à la linéarisation des équations. Les termes  $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$  et  $\underline{U} \cdot \text{grad } \theta$  sont en effet négligeables et le système linéaire s'écrit

$$\text{div } \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\text{grad } \Pi + RP\theta \underline{e}_z + P \Delta \underline{U}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = w + \Delta \theta, \quad (2.17)$$

avec les mêmes conditions aux limites.

## 2.2 Hypothèse bidimensionnelle

Par simplicité, on se restreint ici aux écoulements bidimensionnels dans un plan vertical. Une raison physique permettant de justifier cette approche est le fait que l'on observe des rouleaux de convections 2D au seuil de l'instabilité, du moins pour les conditions aux limites présentées ici.

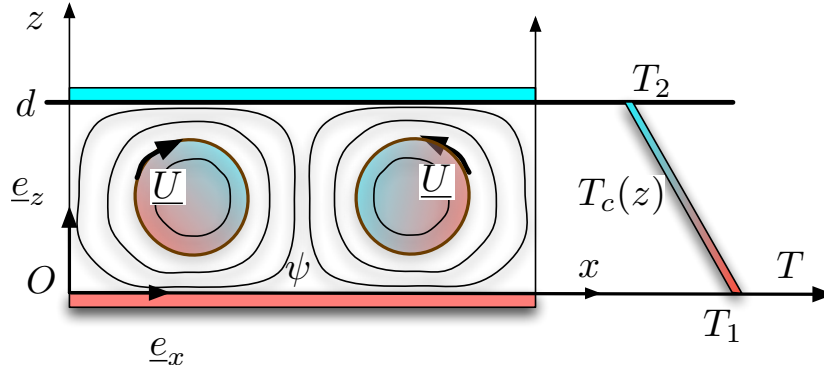


FIGURE 2.4 – Fonction de courant  $\psi(x, z, t)$  dans le cas bidimensionnel.

On suppose ici que  $v = 0$  et que  $u(x, z, t)$ ,  $w(x, z, t)$ ,  $\theta(x, z, t)$  et  $\Pi(x, z, t)$  ne dépendent pas de  $y$ . Les équations s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + P \Delta u, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= w + \Delta \theta, & \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + RP\theta + P \Delta w. \end{aligned} \quad (2.18)$$

avec  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  et les conditions aux limites

$$\theta = 0, \quad w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \quad (2.19)$$

L'équation  $\text{div } \underline{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  entraîne alors qu'il existe une fonction de courant  $\psi(x, z)$  telle que

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.20)$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement en  $u$  et  $w$  s'écrivent alors

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} - P \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + RP\theta + P \Delta \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.21)$$

On peut alors éliminer le champ  $\Pi$  de ces deux équations en multipliant la première par  $-\frac{\partial}{\partial z}$ , la seconde par  $\frac{\partial}{\partial x}$  puis en les sommant. Le système linéaire s'écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = R P \frac{\partial \theta}{\partial x} + P \Delta^2 \psi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta, \quad (2.22)$$

où apparait le bilaplacien  $\Delta^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ . Les conditions aux limites s'écrivent maintenant

$$\theta = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \quad (2.23)$$

### 2.3 Solutions sans conditions aux limites

Dans un premier temps, nous allons chercher les solutions de l'équation linéaire

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = R P \frac{\partial \theta}{\partial x} + P \Delta^2 \psi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta, \quad (2.24)$$

en l'absence de conditions aux limites. Dans ce cas, les équations linéaires et à coefficients constants sont invariantes par translations en espace et en temps, ce qui permet la recherche de solutions complexes sous la forme

$$\psi(x, z, t) = \psi_m e^{i(k_x x + k_z z) + s t} \quad \text{et} \quad \theta(x, z, t) = \theta_m e^{i(k_x x + k_z z) + s t}, \quad (2.25)$$

où  $\psi_m$  et  $\theta_m$  sont des amplitudes complexes,  $k_x$  et  $k_z$  les composantes du vecteur d'onde  $\underline{k} = k_x \underline{e}_x + k_z \underline{e}_z$  et  $s = \sigma - i\omega$  un complexe. Comme les équations sont linéaires à coefficients réels, la partie réelle d'une combinaison quelconque de solutions complexes est aussi solution. En reportant l'expression des solutions dans le système d'équations 2D on obtient :

$$\begin{aligned} -s k^2 \psi_m &= i k_x R P \theta_m + P k^4 \psi_m, \\ s \theta_m &= i k_x \psi_m - k^2 \theta_m, \end{aligned} \quad (2.26)$$

où  $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$  désigne le module du vecteur d'onde  $\underline{k}$ . On peut écrire ce système linéaire sous la forme

$$s \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P k^2 & -R P i k_x / k^2 \\ i k_x & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Ce système admet des solutions  $(\psi_m, \theta_m)$  non triviales lorsque le déterminant du système est nul c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} -P k^2 - s & -R P i k_x / k^2 \\ i k_x & -k^2 - s \end{vmatrix} = 0, \quad (2.28)$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$s^2 + s(P+1)k^2 + Pk^4 - R P k_x^2 / k^2 = 0. \quad (2.29)$$

Cette équation est la "relation de dispersion généralisée" du système linéarisé autour de l'équilibre considéré. Elle relie  $s = \sigma - i\omega$  au vecteur d'onde  $\underline{k}$  et aux paramètres de contrôle. Cette relation généralise en effet la notion de "relation de dispersion" obtenue dans le cas particulier où  $\sigma$  est identiquement nul.

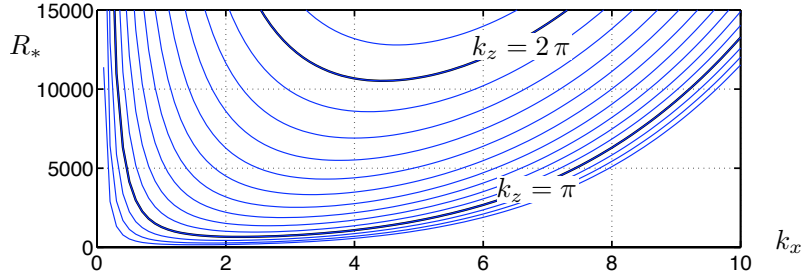


FIGURE 2.5 – Courbes  $R_*(k_x, k_z)$  en fonction de  $k_x$  pour  $k_z$  fixé prenant des valeurs  $k_z = \zeta \pi$  avec  $\zeta = .7, .8, \dots, 2, 2.1$ .

Lorsque  $k_x$ ,  $k_z$  et  $s$  vérifient la relation de dispersion généralisée, les solutions, pour lesquelles  $(\psi_m, \theta_m)$  est défini à une constante complexe multiplicative près, sont les “modes propres complexes”. Leurs parties réelles sont les modes propres.

Le discriminant de ce polynôme de degré deux en  $s$  est  $(P-1)^2 k^4 + 4RPk_x^2/k^2$ . Son signe étant toujours positif, les racines sont réelles. Pour déterminer leurs signes, on écrit alors l’équation sous la forme

$$\mathcal{P}(R, P, k_x, k_z; s) = s^2 + s(P+1)k^2 + P \frac{k_x^2}{k^2} \left( \frac{k^6}{k_x^2} - R \right) = 0. \quad (2.30)$$

Pour  $R < k^6/k_x^2$  leur produit est positif et les deux racines sont négatives dans la mesure où leur somme l’est. Les deux modes de vecteur d’onde  $\underline{k}$  correspondant aux deux racines  $s_1$  et  $s_2$  sont alors amortis exponentiellement.

Pour  $R > k^6/k_x^2$  un de ces modes croît exponentiellement dans la mesure où le produit des racines du polynôme en  $s$  est négatif.

Étant donné un vecteur d’onde  $\underline{k} = k_x \underline{e}_x + k_z \underline{e}_z$ , la valeur critique du nombre de Rayleigh pour laquelle un des deux modes de Fourier croît exponentiellement est donc

$$R_*(k_x, k_z) = \frac{k^6}{k_x^2} = \frac{(k_x^2 + k_z^2)^3}{k_x^2}. \quad (2.31)$$

La figure 2.5 représente la variation de  $R_*(k_x, k_z)$  en fonction de  $k_x$  pour plusieurs valeurs de  $k_z$  fixée.

### 3 Calcul du seuil de convection

La superposition de deux modes obtenus en faisant abstraction des conditions aux limites permet de construire un mode satisfaisant les conditions aux limites libres. Une démarche systématique permettant d’éviter cette astuce est ensuite présentée. L’examen de la partie réelle des valeurs propres permet de déterminer le seuil de convection qui ne dépend que du nombre de Rayleigh.

### 3.1 Solutions avec conditions aux limites

Si le vecteur  ${}^t(\psi_m, \theta_m)$  est solution du système linéaire (2.27), on peut écrire

$$\psi_m = -i \frac{s + k^2}{k_x} \theta_m . \quad (2.32)$$

D'autre part, les valeurs propres  $s$  du problème sans conditions aux limites ne dépendent pas du signe de  $k_z$ . Par conséquent, la superposition de deux modes propres complexes de vecteurs d'ondes respectifs

$$\underline{k}_+ = k_x \underline{e}_x + n \pi \underline{e}_z \quad \text{et} \quad \underline{k}_- = k_x \underline{e}_x - n \pi \underline{e}_z , \quad (2.33)$$

où  $k_x$  est un vecteur d'onde strictement positif et  $n$  est un nombre entier positif, et d'amplitudes respectives  ${}^t(\psi_{m+}, \theta_{m+})$  et  ${}^t(\psi_{m-}, \theta_{m-})$  définies par

$$\theta_{m+} = \frac{B}{2i} , \quad \psi_{m+} = -i \frac{s + k^2}{k_x} \theta_{m+} , \quad \theta_{m-} = -\theta_{m+} , \quad \psi_{m-} = -\psi_{m+} , \quad (2.34)$$

où  $B$  est une amplitude quelconque, est un nouveau mode propre qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} \psi(x, z, t) \\ \theta(x, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \frac{s+k^2}{k_x} \\ 1 \end{pmatrix} B \sin(n \pi z) e^{i k_x x + s t} . \quad (2.35)$$

Lorsque  $s$  est réel, la partie réelle de cette solution complexe est une solution réelle qui s'écrit, en choisissant  $B$  réel,

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \frac{s + k^2}{k_x} B \sin(k_x x) \sin(n \pi z) e^{s t} \\ \theta(x, z, t) &= B \cos(k_x x) \sin(n \pi z) e^{s t} , . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Il est en effet toujours possible de se ramener au cas où  $B$  est réel en changeant l'origine de la coordonnée  $x$ . En choisissant  $n$  entier, la solution ainsi construite vérifie les conditions aux limites  $\psi(x, 0, t) = \psi(x, 1, t) = 0$  et  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(x, 0, t) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(x, 1, t)$ . La figure 2.6 représente les iso-contours des champs réels  $\theta$  et  $\psi$  pour  $n = 1$ .

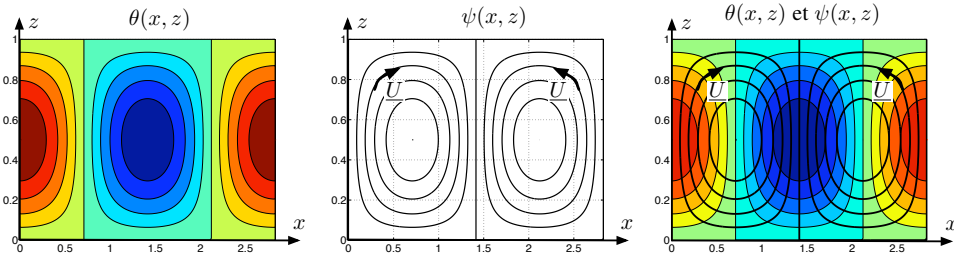


FIGURE 2.6 – Iso-contours des champs  $\theta(x, z) = \cos(k_x x) \sin(\pi z)$  et  $\psi(x, z) = \sin(k_x x) \sin(\pi z)$  pour  $k_x = \pi/\sqrt{2}$ .

On a donc construit une famille complète de solutions des équations linéaires avec conditions aux limites.

### 3.2 Méthode générale de recherche des modes propres

La démarche que nous avons suivie, consistant à construire une solution satisfaisant les conditions aux limites en combinant deux solutions en domaine infini relève plus de la chance que d'une démarche systématique. Nous présentons donc une méthode générale qui pourra être utilisée pour d'autres conditions aux limites ou d'autres systèmes.

Dans la mesure où le problème est invariant par translations en  $t$  et en  $x$ , mais pas en  $z$ , on cherche des solutions complexes sous la forme

$$\psi(x, z, t) = \Psi(z) e^{i k_x x + s t} \quad \text{et} \quad \theta(x, z, t) = \Theta(z) e^{i k_x x + s t}, \quad (2.37)$$

où  $\Psi(z)$  et  $\Theta(z)$  sont des fonctions complexes de la coordonnée verticale  $z$ . En reportant dans les équations on obtient le système

$$\begin{aligned} s (D^2 - k_x^2) \Psi &= i k_x R P \Theta + P (D^2 - k_x^2)^2 \Psi, \\ s \Theta &= i k_x \Psi + (D^2 - k_x^2) \Theta, \end{aligned} \quad (2.38)$$

où  $D = \frac{d}{dz}$  est l'opérateur de dérivation par rapport à la variable  $z$ . Les conditions aux limites s'écrivent

$$\Theta(0) = \Theta(1) = 0, \quad \Psi(0) = \Psi(1) = 0 \quad \text{et} \quad D^2 \Psi(0) = D^2 \Psi(1) = 0. \quad (2.39)$$

Pour éliminer la fonction  $\Theta(z)$ , on écrit le système sous la forme

$$\begin{aligned} [s - P (D^2 - k_x^2)] (D^2 - k_x^2) \Psi &= i k_x R P \Theta, \\ [s - (D^2 - k_x^2)] \Theta &= i k_x \Psi. \end{aligned} \quad (2.40)$$

On applique l'opérateur  $s - (D^2 - k_x^2)$  à la première équation ce qui conduit à

$$[s - (D^2 - k_x^2)] [s - P (D^2 - k_x^2)] (D^2 - k_x^2) \Psi = -k_x^2 R P \Psi. \quad (2.41)$$

Comme  $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$ , les conditions aux limites en température s'écrivent

$$s D^2 \Psi - P (D^2 - k_x^2)^2 \Psi = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1. \quad (2.42)$$

On doit résoudre l'équation

$$[s - (D^2 - k_x^2)] [s - P (D^2 - k_x^2)] (D^2 - k_x^2) \Psi = -k_x^2 R P \Psi. \quad (2.43)$$

avec les conditions aux limites

$$\Psi = 0, \quad D^2 \Psi = 0 \quad \text{et} \quad D^4 \Psi = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1. \quad (2.44)$$

La symétrie  $z \rightarrow -z$  de ce système entraîne que les solutions sont toutes de la forme  $\Psi = A \sin(n \pi z)$  où  $A$  est une amplitude quelconque et  $n$  est un nombre entier. On retrouve ainsi les solutions de la forme (2.35).

### 3.3 Seuil de convection thermique

On a donc trouvé une base de solutions qui permet d'écrire toute solution comme étant la partie réelle de solutions complexes de la forme

$$\psi(x, z, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin(n \pi z) \int_{\mathbb{R}} \left[ \widehat{\psi}_n^+(k_x, t) + \widehat{\psi}_n^-(k_x, t) \right] e^{i k_x x} dk_x,$$

$$\theta(x, z, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin(n \pi z) \int_{\mathbb{R}} \left[ \widehat{\theta}_n^+(k_x, t) + \widehat{\theta}_n^-(k_x, t) \right] e^{i k_x x} dk_x \quad (2.45)$$

où  $\mathbb{N}^*$  est l'espace des entiers strictement positifs et où les amplitudes complexes s'écrivent

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_n^\pm(k_x, t) &= B_n^\pm(k_x) \exp \left[ S_n^\pm(k_x) t \right], \\ \widehat{\psi}_n^\pm(k_x, t) &= -i \frac{S_n^\pm(k_x) + k_x^2 + n^2 \pi^2}{k_x} \widehat{\theta}_n^\pm(k_x, t), \end{aligned} \quad (2.46)$$

pour lesquelles les amplitudes complexes  $B_n^+(k_x)$  et  $B_n^-(k_x)$  sont totalement arbitraires et où  $S_n^+(k_x)$  et  $S_n^-(k_x)$  désignent les deux racines en  $s$  du polynôme

$$s^2 + s(P+1)(k_x^2 + n^2 \pi^2) + P \frac{k_x^2}{k_x^2 + n^2 \pi^2} \left[ \frac{(k_x^2 + n^2 \pi^2)^3}{k_x^2} - R \right] = 0. \quad (2.47)$$

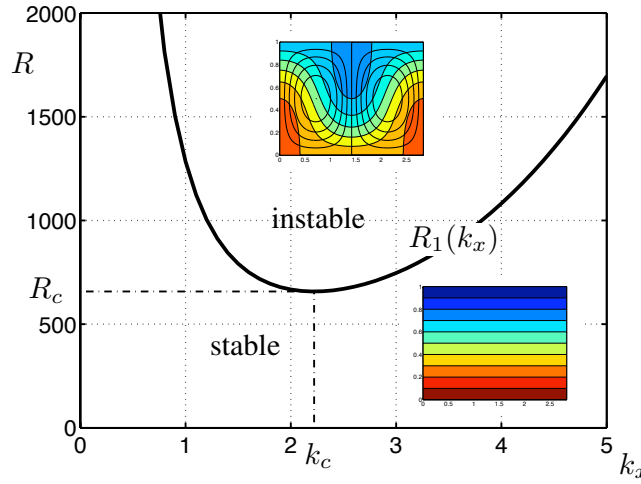


FIGURE 2.7 – Courbe de la fonction  $R_1(k_x) = (k_x^2 + \pi^2)^3 / k_x^2$ . Minimum en  $(k_c, R_c) = (\pi/\sqrt{2}, 27 \pi^4/4)$ .

On trace alors la courbe  $R_1(k_x) = R_*(k_x, \pi) = (k_x^2 + \pi^2)^3 / k_x^2$  (voir figure 2.7). On montre facilement que son minimum est atteint pour le couple  $(k_x, R) = (k_c, R_c)$  avec

$$R_c = \frac{27 \pi^4}{4} \sim 657 \quad \text{et} \quad k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sim 2,2. \quad (2.48)$$

On peut donc conclure en remarquant que si  $R \leq R_c$ , tous les modes obtenus pour tous les  $k_x$  et  $n$  possibles correspondent à des valeurs de  $S_n^\pm(k_x)$  négatives. L'état conductif est alors stable dans la mesure où une petite perturbation  $\psi(x, z, 0)$ ,  $\theta(x, z, 0)$  quelconque tendra vers zéro avec le temps. En revanche, si  $R > R_c$ , il existe au moins un mode (en réalité un continuum) dont le taux de croissance est positif. L'équilibre conductif est alors instable.

Le seuil de convection est donc atteint pour  $R = R_c \sim 657$ . Dans une couche d'extension horizontale infinie, le mode le plus instable correspond à  $k_x = k_c$ , c'est-à-dire à la longueur d'onde  $L_c = 2 \pi / k_c \sim 2,8$ .

Du point de vue expérimental, lorsque l'on augmente progressivement le nombre de Rayleigh, par exemple en accentuant la différence de température

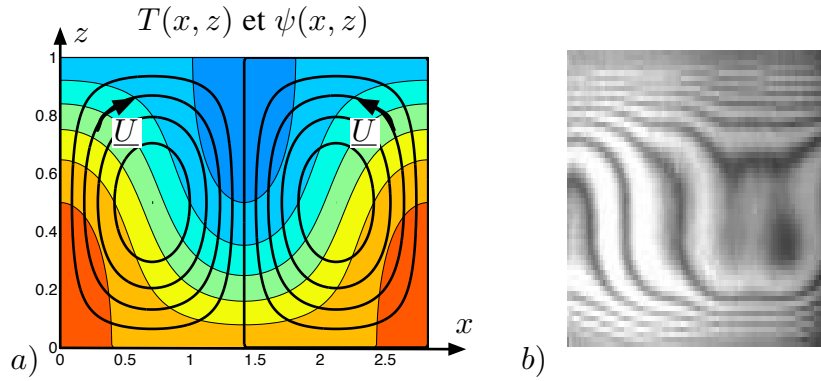


FIGURE 2.8 – a) Iso-contours des champs  $T(x, z)$  et  $\psi(x, z)$ . b) Visualisation expérimentale du champ de densité.

entre les deux plaques, l'état conductif devient instable et laisse la place à des rouleaux de convection (figure 2.8) stables dont l'amplitude croît comme le carré de l'écart ( $R - R_c$ ). Cette constatation permet de déduire que l'on est dans le cas d'une bifurcation fourche supercritique.

Dans le cas où les conditions aux limites libres pour la vitesse sont remplacées par des conditions aux limites rigides  $u = w = 0$ , l'application de la méthode générale conduit aux valeurs critiques

$$R_c \sim 1707 \quad \text{et} \quad k_c = 3.117. \quad (2.49)$$

On voit que le frottement sur les parois retarde l'apparition de la convection et diminue la longueur d'onde du mode le plus instable.

## FORMULAIRE

### Équations du modèle de convection thermique

Les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq avec conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0, & \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_r} \operatorname{grad} p - \frac{\rho}{\rho_r} g \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}, \\ \frac{\rho}{\rho_r} &= 1 - \alpha (T - T_r), & \frac{dT}{dt} &= \kappa \Delta T, \\ T &= T_1 \quad \text{en } z = 0 & \text{et} \quad T &= T_2 \quad \text{en } z = d, \\ w &= 0 \quad \text{et} & \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \end{aligned}$$

### État conductif

En notant  $T(\underline{x}, t) = T_c(z) + \theta(\underline{x}, t)$  et  $p(\underline{x}, t) = p_c(z) + \rho_r \Pi(\underline{x}, t)$ , où  $T_c(z) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{d} z$  et  $p_c(z) = p_r - \rho_r g z + \rho_r \alpha g (T_1 - T_r) z - \rho_r \alpha g \frac{T_1 - T_2}{2d} z^2$  désignent

l'état conductif (stationnaire), le modèle s'écrit :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} &= -\operatorname{grad} \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \theta &= \frac{T_1 - T_2}{d} w + \kappa \Delta \theta. \\ \theta = 0, \quad w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 &\quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = d. \end{aligned}$$

### Adimensionalisation des équations

Le choix des unités de longueur  $[L] = d$ , de temps  $[\tau] = d^2/\kappa$  et de température  $[\Theta] = T_1 - T_2$  conduit aux équations :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_* \underline{U}^* = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial t^*} + \underline{U}^* \cdot \operatorname{grad}_* \underline{U}^* &= -\operatorname{grad}_* \Pi^* + R P \theta^* \underline{e}_z + P \Delta_* \underline{U}^*, \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \underline{U}^* \cdot \operatorname{grad}_* \theta^* &= w^* + \Delta_* \theta^*, \\ \theta^* = 0, \quad w^* = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0 &\quad \text{en } z^* = 0 \text{ et } z^* = 1 \\ \text{avec } R = \frac{\alpha g d^3 (T_1 - T_2)}{\nu \kappa} \text{ (Rayleigh)} \quad \text{et} \quad P = \frac{\nu}{\kappa} \text{ (Prandtl)}. \end{aligned}$$

### Linéarisation des équations

En supposant que les perturbations  $\underline{U}$ ,  $\theta$  et  $\Pi$  sont petites, les équations linéarisées s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} &= -\operatorname{grad} \Pi + R P \theta \underline{e}_z + P \Delta \underline{U}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = w + \Delta \theta, \\ \text{avec } \theta = 0, \quad w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 &\quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \end{aligned}$$

### Hypothèse bidimensionnelle

Dans le cas bidimensionnel, l'introduction d'une fonction de courant  $\psi$  telle que  $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$  et  $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$  conduit, après élimination de la pression, au système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = R P \frac{\partial \theta}{\partial x} + P \Delta^2 \psi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta, \\ \text{avec } \theta = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1. \end{aligned}$$

### Solutions sans conditions aux limites

En l'absence de conditions aux limites, les équations linéaires et à coefficients constants sont invariantes par translations en espace et en temps, ce qui permet la recherche de solutions complexes et l'expression de relation de dispersion généralisée :

$$\begin{aligned} & (\psi, \theta) = (\psi_m, \theta_m) \exp [i(k_x x + k_z z) + s t] , \\ \Rightarrow & s \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P k^2 & -R P i k_x / k^2 \\ i k_x & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_m \\ \theta_m \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & s^2 + s(P+1)k^2 + Pk^4 - R P k_x^2 / k^2 = 0 . \end{aligned}$$

### Solutions avec conditions aux limites

La superposition des deux modes de vecteurs d'ondes  $\underline{k}_+ = k_x \underline{e}_x + n\pi \underline{e}_z$  et  $\underline{k}_- = k_x \underline{e}_x - n\pi \underline{e}_z$ , d'amplitudes opposées mais de même valeur propre  $s$ , permet de construire les solutions réelles :

$$\begin{aligned} \theta(x, z, t) &= B \cos(k_x x) \sin(n\pi z) e^{st} , \\ \psi(x, z, t) &= \frac{s + k^2}{k_x} B \sin(k_x x) \sin(n\pi z) e^{st} . \end{aligned}$$

En choisissant  $n$  entier, cette solution vérifie les conditions aux limites  $\psi(x, 0, t) = \psi(x, 1, t) = 0$  et  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(x, 0, t) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(x, 1, t)$ .

### Seuil de convection thermique

La condition d'instabilité  $R > R_*(k_x, k_z) = k^6 / k_x^2$  conduit à la recherche du minimum de  $R_1(k_x) = (k_x^2 + \pi^2)^3 / k_x^2$  pour  $n = 1$  et donc au seuil de l'instabilité décrit par :

$$R_c = \frac{27 \pi^4}{4} \sim 657 \quad \text{et} \quad k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sim 2,2 .$$

## EXERCICES

### EXERCICE 2.1 Convection en milieu poreux

On considère un fluide dans un milieu poreux compris entre deux plaques planes horizontales d'équations  $z = 0$  et  $z = d$  et maintenues à des températures respectives  $T_1$  et  $T_2$  avec  $T_1 > T_2$ . On suppose que les champs de vitesse  $\underline{U} = (u, v, w)$ , de pression  $p$  et de température  $T$  sont régis par le modèle

constitué des équations

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0, & \rho &= \rho_r [1 - \alpha (T - T_r)], \\ \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_r} \operatorname{grad} p - \frac{\rho}{\rho_r} g \underline{e}_z - \beta \underline{U}, & \frac{dT}{dt} &= \kappa \Delta T \end{aligned} \quad (2.50)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$ ,  $\rho_r$  et  $T_r$  sont des paramètres constants et  $g$  la gravité, avec les conditions aux limites en température et en vitesse  $T = T_1$  en  $z = 0$ ,  $T = T_2$  en  $z = d$ , et  $w = 0$  en  $z = 0$  et  $z = d$ .

- 1) Déterminer le profil de température conductif  $T_c(z)$  (à l'équilibre) solution du modèle lorsque  $\underline{U} = \underline{0}$ . En déduire le profil de pression  $p_c(z)$  en supposant que  $p_c(0) = p_r$  où  $p_r$  est une pression de référence. On pourra noter  $\Gamma = (T_1 - T_2)/d$ .

| On a  $T_c(z) = T_1 - \Gamma z$  et  $p_c(z) = p_r - \rho_r g [1 - \alpha (T_r - T_1)] z - \frac{1}{2} \rho_r \alpha g \Gamma z^2$ .

- 2) On note  $\theta(x, y, z, t) = T(x, y, z, t) - T_c(z)$  et  $p(x, y, z, t) = p_c(z) + \rho_r \Pi(x, y, z, t)$ . Écrire les équations du modèle en fonction de  $\underline{U}$  et de ces nouveaux champs.

| Les équations du modèle avec les nouvelles variables sont

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{d\underline{U}}{dt} = -\operatorname{grad} \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z - \beta \underline{U}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \Gamma w + \kappa \Delta \theta.$$

- 3) Montrer que les équations du modèle, linéarisées autour de l'état conductif, peuvent s'écrire sous la forme  $\operatorname{div} \underline{U} = 0$ ,  $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \Pi + \alpha g \theta \underline{e}_z - \beta \underline{U}$  et  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Gamma w + \kappa \Delta \theta$ .

| Il suffit de remplacer  $\frac{d}{dt}$  par  $\frac{\partial}{\partial t}$  en négligeant  $\underline{U} \cdot \operatorname{grad}$ .

- 4) On choisit d'adimensionnaliser les équations avec les unités :

$$[L] = d, \quad [\tau] = d^2/\kappa, \quad [\Theta] = T_1 - T_2, \quad [U] = [L]/[\tau] \text{ et } [\Pi] = [U]^2.$$

Écrire les équations du modèle linéarisé ainsi adimensionnées en mettant en évidence les deux nombres sans dimension

$$E = \frac{\beta d^2}{\kappa} \quad \text{et} \quad F = \frac{\alpha g d (T_1 - T_2)}{\kappa \beta}. \quad (2.51)$$

| Les équations linéaires adimensionnées s'écrivent (en omettant les exposants \*) :

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \Pi + E F \theta \underline{e}_z - E \underline{U}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = w + \Delta \theta.$$

| Les conditions aux limites s'écrivent  $\theta = 0$  et  $w = 0$  en  $z = 0$  et  $z = 1$ .

- 5) On se restreint au problème bidimensionnel et l'on introduit donc une fonction de courant  $\psi(x, z, t)$  telle que  $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$  et  $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ . Écrire les équations du mouvement à l'aide de cette fonction de courant après élimination de la pression (en prenant le rotationnel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement). Écrire les conditions aux limites.

| Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = E F \frac{\partial \theta}{\partial x} - E \Delta \psi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta.$$

| Les équations aux limites s'écrivent  $\theta = 0$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$  en  $z = 0$  et  $z = 1$ .

6) On cherche des solutions complexes de la forme

$$[\psi(x, z, t), \theta(x, z, t)] = [\psi_m, \theta_m] e^{i(k_x x + k_z z) + s t}. \quad (2.52)$$

Écrire le système linéaire vérifié par les amplitudes complexes  $(\psi_m, \theta_m)$ .  
En déduire que les solutions sont de la forme

$$[\psi(x, z, t), \theta(x, z, t)] = \theta_m \left[ -i \frac{s + k^2}{k_x}, 1 \right] e^{i(k_x x + k_z z) + s t}. \quad (2.53)$$

En remplaçant l'expression des modes dans les équations, on obtient

$$-s k^2 \psi_m = i k_x E F \theta_m + E k^2 \psi_m, \quad s \theta_m = i k_x \psi_m - k^2 \theta_m.$$

7) En déduire l'équation de dispersion généralisée reliant  $s$ ,  $k_x$  et  $k_z$ . On pourra noter  $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ .

L'équation de dispersion généralisée s'écrit alors

$$s^2 + s(E + k^2) + E k^2 - E F k_x^2 / k^2 = 0.$$

8) Montrer que les racines  $s$  de la relation de dispersion généralisée sont réelles et de somme négative pour tout couple  $(k_x, k_z)$ .

Le discriminant  $(E - k^2)^2 + 4 E F k_x^2 / k^2$  est toujours positif. Les racines sont donc réelles. Leur somme  $-(E + k^2)$  est négative.

9) Quelle condition sur  $(E, F)$  régit l'existence d'une racine  $s$  positive pour un couple  $(k_x, k_z)$  donné ?

Pour  $(k_x, k_z)$  donnés, il existe une racine  $s$  positive pour  $F \geq k^4 / k_x^2$  (produit des racines).

10) Montrer que le couple de champs complexes  $[\psi(x, z, t), \theta(x, z, t)] = \theta_m \left[ -i \frac{s + k^2}{k_x}, 1 \right] \sin(k_z z) e^{i k_x x + s t}$ , avec  $s$  solution de la relation de dispersion généralisée, est la somme de solutions de la forme (2.53). Justifier le choix  $k_z = n \pi$  avec  $n$  entier strictement positif pour satisfaire les conditions aux limites.

La décomposition  $\sin(k_z z) = \frac{1}{2i} e^{i k_z z} - \frac{1}{2i} e^{-i k_z z}$  répond à la question dans la mesure où la relation de dispersion ainsi que la relation  $\psi_m = -i \frac{s + k^2}{k_x} \theta_m$  sont invariantes en changeant  $k_z$  en  $-k_z$ . Le choix  $k_z = n \pi$  avec  $n$  entier permet de satisfaire les conditions aux limites  $\theta = 0$  et  $w = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$  en  $z = 0$  et  $z = 1$ .

11) Dans un plan  $(k_x, F)$ , tracer les courbes  $F_*(k_x, n)$  délimitant la croissance ou la décroissance des modes de vecteur d'onde  $(k_x, k_z)$  avec  $k_z = n \pi$ .

Les courbes  $F_*(k_x, n) = (k_x^2 + n^2 \pi^2)^2 / k_x^2$  ont une allure qui ressemble à celle des courbes  $R_*(k_x, n)$  de la convection de Rayleigh-Bénard.

12) Calculer le minimum de la fonction  $F_*(k, 1)$ .

Le minimum de la courbe  $F_*(k_x, 1) = (k_x^2 + \pi^2)^2 / k_x^2$  est obtenu pour  $k = \pi$  et vaut  $F = 4 \pi^2$ .

13) Montrer que le seuil de l'instabilité convective ne dépend pas de  $E$  et calculer le seuil  $F = F_c$  de cette instabilité.

Le seuil d'instabilité est obtenu pour  $F = F_c = 4 \pi^2$  car  $F_*(k_x, 1) < F_*(k_x, n)$  pour tout  $n > 1$ .

14) Calculer la longueur d'onde des rouleaux de convection observés au seuil de l'instabilité. Comparer avec la distance entre les deux plaques.

---

La longueur d'onde des rouleaux au seuil est  $L_c = 2\pi/k_c = 2$  avec  $k_c = \pi$ . Cela correspond au double de la distance entre les deux plaques.